·数量经济理论及应用·

Copula 函数度量风险价值的 Monte Carlo 模拟

陈守东，胡铮洋，孔繁利

（吉林大学 数量经济研究中心，吉林 长春 130012）

[摘　要] Copula 函数广泛地应用于金融领域，特别在金融市场上的风险管理、投资组合的选择、资产定价等方面已经成为解决金融问题的一个有力的工具。我们选取了三种具有代表性的 Copula 函数对金融时间序列建模，以描述不同金融数据间的相依关系，并将其应用于证券市场的风险度量，进行 Monte Carlo 模拟计算投资组合的 VaR。将 Copula 方法的计算结果与传统的正态假设模拟结果比较表明，Copula 方法对金融风险的度量要明显优于正态方法。

[关键词]：Copula 函数；Monte Carlo 模拟；风险价值

[中图分类号] F830.91　　[文献标识码] A　　[文章编号] 0257-2834(2006)02-0085-07

[基金项目] 教育部重点研究基地重大项目（05JJD790005）

[收稿日期] 2005－08－31

[作者简介] 陈守东（1955－），男，天津人，吉林大学数量经济研究中心教授，博士生导师。

一、引　言

Copula 的研究起源于 Sklar [1]，而 Nelsen 比较系统地介绍了 Copula 的定义、构建方法、Archimedean Copula 及相依性 [2]，Bouye，Durrleman，Nikeghbali 系统地介绍了 Copula 在金融中的一些应用 [3]。Copula 可以解释为“相依函数”或“连接函数”，是把多维随机变量的联合分布用其一维边际分布连接起来的函数。Copula 目前已被广泛地应用于金融领域，特别在金融市场上的风险管理、投资组合的选择、资产定价等方面，已经成为解决金融问题的一个有力的工具。本文讨论利用 Copula 函数度量风险价值的 Monte Carlo 模拟。

在现代金融风险管理中，RiskMetrics Technical Document 和 Dowd 提出风险价值（VaR）是最基本和最核心的度量手段。[4] [5] 在实际研究中，刻画金融资产收益的联合分布是一个很重要的问题，一般来说金融资产收益的分布都是“厚尾尖峰”分布，如果采用大多数风险管理模型中的多个金融资产收益序列或风险因子的联合分布服从多元正态分布，以及资产组合中的每一单个资产的线性相关性假设，可能对实证的结果产生很大的偏差和误导。大量的实证表明，这种假设经常与客观事实相违背 [6]，特别是当极端事件发生时，在正态分布假设下进行的资产组合的风险分析及其 VaR 计算与实际情况偏差较大。因为我们可以将金融资产风险分解成单个资产的风险和由投资组合产生的风险两部分，其中单个金融资产的风险可以由它们各自的边缘分布来描述，而由投资组合产生的风险则完全由连接它们的 Copula 函数来描述。如果投资组合中的金融

资产已经确定，那么市场风险就相当于投资组合中资产结构的风险，可以完全由一个相应的Copula函数来描述。假定随机变量X和Y分别代表两种金融资产的损失，它们的边缘分布分别为$F(x)$和$G(y)$，具有Copula函数$C(F(x),G(y))$，则投资组合的VaR可表示为：

$$P\{\delta X+(1-\delta)Y>\gamma\}=\int dC(F(x),G(y))$$

其中δ代表资产X在投资组合中的权重，γ为限定值，它与置信水平α是一一对应的。若Copula函数已知，但VaR的解析式很难求出，也可以通过模拟的方法计算VaR值。由于Copula技术是对整个联合分布建模，并且很容易推广到条件分布的情形 [7]，因此可得到与真实分布更接近的联合分布，从而可以建立更为有效的风险管理模型。

本文将Copula函数运用于风险管理的实证，选取三种有代表性的Copula函数描述的金融时间序列的相依关系，通过Monte Carlo模拟计算投资组合的VaR，并将其与传统正态模拟计算的投资组合的VaR结果比较。结果表明，正态模拟在α对应的不同分位数下计算的VaR都和实际值之间存在着较大误差，而三种Copula函数的模拟结果明显好于正态结果。由事后检验看出，三种Copula函数的结果跟实际的经验分布结果非常接近。在$\alpha=1\%$时，Gumbel Copula函数在不同模拟次数下的结果和实际经验结果几乎相同；在$\alpha=5\%$和$\alpha=10\%$时，Gumbel Copula的模拟结果从总体上看也好于正态Copula和t-Copula函数。从三种Copula函数在不同模拟次数下的事后误差检验结果可以看出，模拟1 000次的结果最差，虽然模拟5 000次和1 939次结果相当，但1 939次总体上略好一些。

二、Sklar定理、Copula函数和相依性

1. Sklar定理

假设一个多维分布函数的边际分布函数为$F_1(x_1),\cdots,F_n(x)$，则存在一个Copula函数满足：

$$H(x_1,\cdots,x_n)=C(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n)) \tag{1}$$

如果$F_1(x_1),\cdots,F_n(x)$是连续的，则Copula函数是惟一确定的，反之亦然。由这个定理我们可以推理得出：当我们确定了多个金融时间序列的边际分布和选定一个合适的Copula函数后，就可以方便地计算出这些金融时间序列的联合分布，这正是Copula函数在实际应用研究中的优势所在。多维分布的选取和确定其具体形式再也不是我们所要考虑的难题，而只需确定边际分布和选取合适的Copula函数。边际分布的确定由于是一维问题，我们已经有许多研究手段可以去实现它，而Copula函数的选择则需要我们通过实证结果的分析和一些评判模型的信息准则来确定。

2. Copula函数

（1）椭球类Copula函数（Elliptical Copula）

（i）正态Copula函数：

$$C_{Ga}^{\rho}(x,y)=\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x)}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(y)}\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{\frac{-(s^2-2\rho st+t^2)}{2(1-\rho^2)}\right\}dsdt \tag{2}$$

其中ρ为相关系数，这个Copula函数的两个边际分布都为正态分布，积分上限$\Phi^{-1}(x)$为标准正态分布函数的逆。

（ii）Student-t Copula函数：

$$C_t^{v,\rho}(x,y)=\int_{-\infty}^{t_v^{-1}(x)}\int_{-\infty}^{t_v^{-1}(y)}\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{(s^2-2\rho st+t^2)}{v(1-\rho^2)}\right\}^{\frac{-(v+2)}{2}}dsdt \tag{3}$$

其中 ρ 为相关系数，$t_v^{-1}(x)$ 为自由度为 v 的标准 t 分布函数的逆。

（2）Archimedean Copula 函数

Archimedean Copula 函数类有一个共同的性质是他们都可以由一个严格单调递增的凸函数 $\phi(u)$ 产生。$\phi(u)$ 满足 $\lim_{\varepsilon \to 0}\varphi(\varepsilon) = \infty$ 及 $\phi(1) = 0$。当 $\phi(u)$ 给定时，可以产生的一个 Archimedean Copula 形如：

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) \tag{4}$$

（i）Gumbel Copula：

$$C(u,v) = \exp(-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}) \tag{5}$$

其中 u, v 为 [0，1] 上的均匀分布变量，θ 为描述两个变量间相依性关系的参数。这类 Copula 函数最早是由 Gumbel 提出的一类 Copula 函数。[8]

（ii）Clayton Copula：

$$C(u,v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}, 0) \tag{6}$$

u, v 为 [0，1] 上的均匀分布变量，θ 为描述两个变量间相依性关系的参数。这类 Copula 函数最早由 Clayton 等人研究而提出。[9]

（iii）Frank Copula：

$$C(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}) \tag{7}$$

u, v 为 [0，1] 上的均匀分布变量，θ 为描述两个变量间相依性关系的参数。这里 Copula 函数最早出现在 Frank 的一篇非统计研究文献中 [10]，这类 Copula 函数的一些统计性质最早是由 Nelsen 和 Genest 给出的 [11] [12]。

3．相依性

（1）线性相关系数

设 $(x,y)^T$ 为一个具有非零有限方差的随机向量，则 $(x,y)^T$ 的线性相关系数为：

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}} \tag{8}$$

其中 $Cov(x,y)$ 为 $(x,y)^T$ 的协方差，$Var(x)$，$Var(y)$ 分别为变量 x 和 y 的方差。线性相关系数 ρ 是描述随机变量相依性的一种最常用方法，其在椭球世界中是一种普遍的测量手段，计算方便，意义直观。但其对相依性的描述往往假设随机变量为线性相关，且其在严格递增非线性变换下是变化的。

（2）秩相关系数

秩相关性反映的是变量间的单调相依性（Monotonic Dependence），因此其在非线性单调变换下保持不变，具有良好的统计特性，要优于传统的线性相关性。秩相关系数中最具代表性的是 Kendall 的 τ [13] 和 Spearman 的 ρ [14]。本文主要应用 Kendall 的 τ 进行 Copula 函数相关计算和参数估计。Kendall 的 τ 定义为：

$$\tau = \Pr\{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0\} - \Pr\{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0\} \tag{9}$$

其中 $(x_1 - x_2)$，$(y_1 - y_2)$ 为来自同一个二维分布的两个独立的随机变量。在实际研究样本数据时我们采用下式计算 Kendall 的 τ：

$$tau = \frac{c-d}{c+d} = \frac{(c-d)}{\binom{n}{2}} \tag{10}$$

其中 c 为样本变量间变化方向一致的数量，d 为样本变量间变化方向相反的数量。

三、实证研究

本文中我们取上证指数和深圳综指的每日收盘价为样本数据，时间长度为 1996 年 12 月 16 日至 2004 年 12 月 31 日共 1 939 组数据（日收益率波动情况见图 1）。在实证中，我们采用对数收益率、等权重投资，在三个置信度 0.90、0.95 和 0.99 下来度量组合的风险价值。

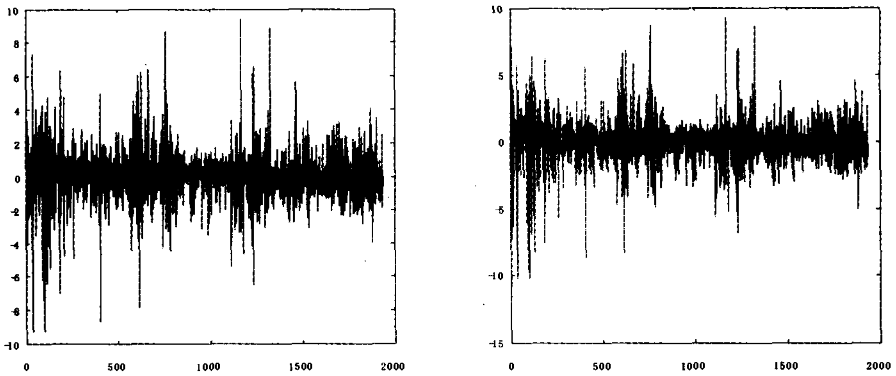

图 1　上证和深证 1 939 天的日收益率波动图

我们首先通过样本数据估计各种分布函数的相关参数和确定两个股指的边际分布；然后通过样本求得的参数确定具体分布函数进行 Monte Carlo 模拟，产生收益率数据，计算投资组合的 VaR。

1．分布及参数估计

（1）描述统计

日度收益定义为：

$$r = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1})$$

P_t 为股指在时刻 t 时的收盘价，样本数据对数收益率的容量为 1 939 组数据，基本的描述统计见表 1。

表 1　各股指和投资组合的描述统计

	最小值	1/4 分位数	均值	中位数	3/4 分位数	标准差
上证	-9.9211	-0.753	0.0122	0.022	0.7474	1.5778
深证	-10.5047	-0.8085	-0.0113	0.0414	0.8191	1.7195
投资组合	-10.213	-0.7632	0.00044	0.0392	0.07712	1.6288

（2）边际分布

在计算样本对数收益率后，我们还需确定 Copula 函数所选取的边际分布，这里分别用正态分布和 t 分布拟合两组序列，图 2 和图 3 给出了两组收益率序列分布的密度函数拟合图。

从图中可以很清楚地看出，自由度为 3 的 t 分布对两组序列的拟合效果要远好于正态分布拟合，说明 t 分布能够比正态分布更好地捕捉金融时间序列的“尖峰厚尾”特性，因此在计算 Copula 函数时，我们将边际分布选取自由度为 3 的 t 分布。

（3）参数估计

为了对所选取的 Copula 函数的各个参数进行估计，我们首先将两组序列转化到均匀分布，分布的散点图如图 4。

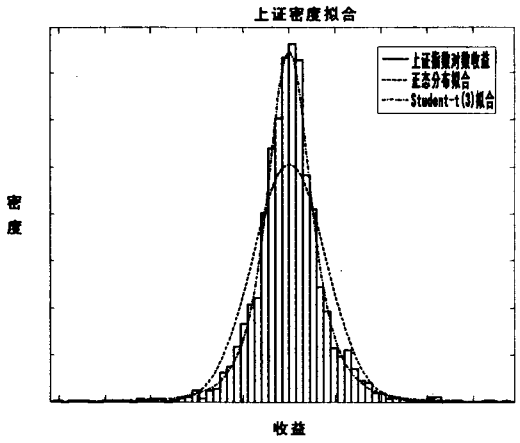

图 2　上证指数收益率曲线拟合图

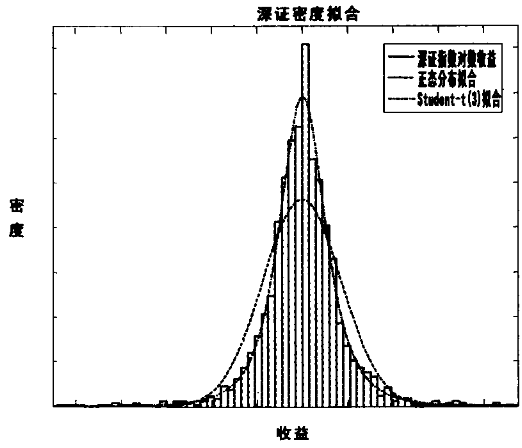

图 3　深证指数收益率曲线拟合图

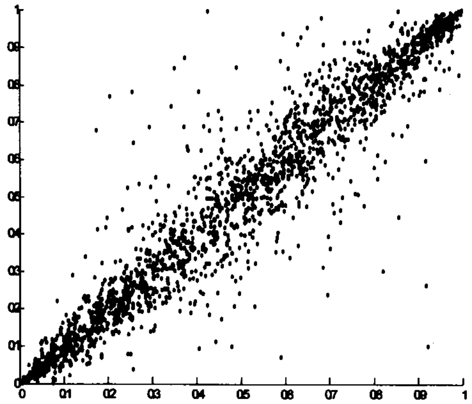

图 4　将上证和深证收益率转化到均匀分布散点图

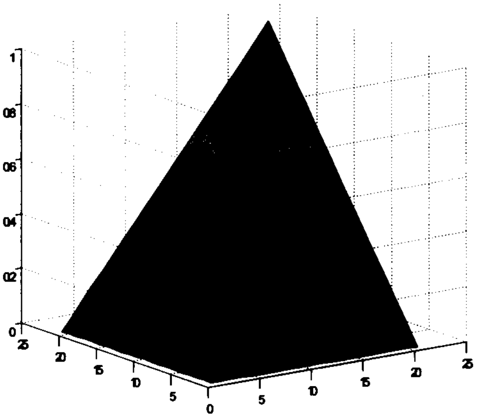

图 5　θ = 6.0372 时的 Gumbel Copula 函数

我们在计算投资组合的 VaR 时分别用传统的正态模拟、正态 Copula 函数模拟、t-Copula 函数模拟和 Gumbel Copula 函数模拟。利用（8）式估计参数 ρ，用（10）式估计 Kendall 的 τ，在估计 Gumbel Copula 的参数 θ 时，采用极大似然估计，各个参数的估计结果见表 2。

表 2　各参数计算结果

	正态参数 ρ	*tau*	$C_{Ga}'\rho$	$C_t'\rho$	$C_{Gu}'\rho$
参数值	0.952	0.8344	0.9663	0.9663	6.0372

2. VaR 的 Monte Carlo 模拟

我们采用正态法和 Copula 方法进行 Monte Carlo 模拟。每种模拟分别进行 5 000 次，1 939 次和 1 000 次。模拟方法算法如下：

传统正态模拟算法：

（i）产生两个独立的正态随机数 z_1, z_2；

（ii）令我们所求的第一个序列的随机数为：$\tilde{z}_1 = z_1$；

(iii) 通过相关系数，求得第二个序列的随机数为：$\tilde{z}_2 = \rho^{-1}(z1, z2)$；

(iv) 将模拟产生的随机数以等权重组合计算不同置信度下的 VaR，结果见表 3。

Copula 模拟算法：

(i) 产生两个均匀随机数 u, w；

(ii) 令所求的第一个随机数为 $x = F_1^{-1}(u)$；

(iii) 通过选定的 Copula 函数求得第二个序列在均匀分布上的随机数 $v = C_u^{-1}(w)$（其中 $C_u = \partial C(u,v)/\partial u$）；

(iv) 通过计算求得第二个随机数为 $y = F_2^{-1}(v)$；

(v) 将模拟产生的随机数以等权重组合计算不同置信度下的 VaR，结果见表 3。

表 3 VaR 的模拟计算结果

模拟方法及其对应的分位数		Monte Carlo 模拟的 VaR 5 000 次	1 939 次	1 000 次	模拟 VaR 对应的百分率 5 000 次	1 939 次	1 000 次
正态模拟	$\alpha = 1\%$	2.364	2.433	2.403	5.16%	4.95%	5.00%
	$\alpha = 5\%$	1.638	1.678	1.648	10.52%	10.21%	10.47%
	$\alpha = 10\%$	1.248	1.277	1.280	15.16%	14.90%	14.90%
$C_{Ga}^{0.9663}$	$\alpha = 1\%$	4.400	4.895	4.252	1.29%	0.98%	1.39%
	$\alpha = 5\%$	2.360	2.398	2.109	5.21%	5.00%	6.65%
	$\alpha = 10\%$	1.632	1.639	1.574	10.62%	10.47%	11.35%
$C_t^{3,0.9663}$	$\alpha = 1\%$	4.689	4.121	4.323	1.03%	1.55%	1.29%
	$\alpha = 5\%$	2.354	2.315	2.294	5.21%	5.36%	5.47%
	$\alpha = 10\%$	1.682	1.615	1.442	10.11%	10.99%	12.69%
$C_{Gu}^{6.0372}$	$\alpha = 1\%$	4.804	4.838	4.740	0.98%	0.98%	1.03%
	$\alpha = 5\%$	2.357	2.383	2.264	5.21%	5.16%	5.72%
	$\alpha = 10\%$	1.603	1.681	1.688	11.09%	10.21%	10.01%

从表 3 可以看出，正态模拟在 α 对应的不同分位数下的误差都和实际值相差较大，而各种 Copula 函数的模拟结果明显好于正态结果。从事后检验看出，三种 Copula 函数的结果跟实际的经验分布结果非常接近。在 $\alpha = 1\%$ 时，Gumbel Copula 函数在不同模拟次数下的结果和实际经验结果几乎相同；在 $\alpha = 5\%$ 和 $\alpha = 10\%$ 时，Gumbel Copula 的模拟结果从总体上看也好于正态 Copula 和 t-Copula 函数。从三种 Copula 函数在不同模拟次数下的事后误差检验结果可以看出，模拟1 000次的结果最差，而模拟 5 000 次和 1 939 次结果相当，1 939 次总体上略好一些。

四、结　论

本文采用 Copula 函数的方法来对上海和深圳股票市场的指数进行 Monte Carlo 模拟，以度量证券市场的风险。从实证结果可以看出，用 Copula 函数描述两个时间序列的相依性关系时得出的 VaR 结果要优于正态情形；在所选的三种 Copula 函数中以 Gumbel Copula 函数模拟的 VaR 效果最好；在模拟次数的比较中，可以看出当模拟次数增大时效果变好，当模拟的次数与实证数据长度接近时效果较好。同时我们也注意到，对收益序列进行边际分布拟合后，选取 t 分布作为边际分布，其模拟的 VaR 结果明显优于其他分布。因此在应用 Copula 函数对金融序列建模时，边际分布的选取可能对实证的结果也有着重要影响。

尽管在 1959 年 Sklar 等人就开始用 Copula 函数进行统计研究，但将 Copula 函数真正应用于

金融、经济研究还是近几年的事，正处于起步阶段。Copula 函数本身所具有的许多优良的统计特性，使其在金融领域，特别在金融市场上的风险管理、投资组合的选择、资产定价等方面有着广泛的应用前景，随着对其研究手段的发展和成熟，Copula 函数必将成为金融计量和金融分析的得力工具。

[参考文献]

[1] Sklar A. Functions de repartition a n dimensions et leurs marges [J]. Publications de L' Institut de. Statistique de L' Universite de Paris, 1959, (8).

[2] Nelsen R B. An Introduction to Copulas [M]. New York: Springer, 1999.

[3] Bouye E, Durrleman V, Nikeghbali A, et al. Copulas for finance: A reading guide and some applications [Z]. Londres: City University Business School-Financial Econometrics Research Centre, Working paper, 2000.

[4] Morgan J P. RiskMetrics, Technology Document: 4th Edition [M]. New York: RiskMetrics Group, 1996.

[5] Dowd K. Measuring Market Risk [M]. New York: John Wiley & Sons Ltd, 2002.

[6] Embrechets P, Mcneil A, Straumann D. Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls [J]. RISK, 1999, (May).

[7] Lindskog F. Modelling dependence with copulas and applications to risk management [A]. Rachev S T. Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance [C]. Amserdam: Elsevier/North-Holland, 2003.

[8] Gumbel E J. Bivariate exponential distributions [J]. Journal of the American Statistical Association, 1960, (55).

[9] Clayton D G. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence [J]. Biometrika, 1978, (65).

[10] Frank M J. On the simultaneous associativity of $F(x,y)$ and $x+y-F(x,y)$ [J]. Aequationes Math, 1979, (19).

[11] Nelsen T A, et al. Black smokers, massive sulfides and vent biota at the Mid-Atlantic Ridge [J]. Nature, 1986, (321).

[12] Genest C. Frank's family of bivariate distributions [J]. Biometrika, 1987, (74).

[13] Kendall M G. A new measure of rank correlation [J]. Biometrika, 1938, (30).

[14] Spearman C. The proof and measurement of association between two things [J]. American Journal of Psychology, 1904, (15).

[责任编辑：赵东奎]

Monte Carlo Simulation by Copula to Measuring Market Risk

CHEN Shou-dong, HU Zheng-yang, KONG Fan-li

(*Quantitative Research Center for Economics, Jilin University, Changchun* 130012, *China*)

Abstract: In this paper, we adopt a new method — Copula to measure the dependence of financial data and compute the market risk. We used three different Copulas to model financial time series in empirical research and compute the VaR of portfolios. When we compared the results of different simulations which computed by Copulas and by Gaussian method, it turns out that Copula method is much better than the Gaussian one.

Key words: Copula; Monte Carlo simulation; value at risk