

文章编号: 1002-1566 (2010) 06-1026-10

随机波动模型的马尔可夫链 —— 蒙特卡洛模拟方法 —— 在沪市收益率序列上的应用

刘金全¹ 李楠¹ 郑挺国²

(1. 吉林大学数量经济研究中心, 吉林 长春 130021; 2. 厦门大学王亚南经济研究院, 福建 厦门 361005)

摘要: 针对具有 Markov 区制转移的、波动均值状态相依的随机波动模型, 基于贝叶斯分析, 我们推导并给出了对区制转移随机波动模型的 MCMC 估计方法, 其中对参数估计采用 Gibbs 抽样方法, 对潜在对数波动和区制的状态变量估计采用“向前滤波、向后抽样”的多步移动方法; 利用该模型, 对我国上证综指周收益率进行了实证分析, 发现对沪市波动性有较好的描述, 捕捉了波动的时变性、聚类性和非线性特征, 同时刻画了沪市的高低波动状态转换过程。

关键词: 区制转移; 随机波动模型; Gibbs 抽样; MCMC 方法

中图分类号: O212

文献标识码: A

MCMC Estimation for Regime Switching Stochastic Volatility Model and Its Application in Shanghai Stock Exchange

LIU Jin-quan¹ LI Nan¹ ZHENG Ting-guo²

(1. Jilin University Quantitative Research Center of Economics, Jilin Changchun 130021, China, 2. The Wang Yanan Institute for Studies in Economics, Xiamen University, Fujian Xiameng 361005, China)

Abstract: This paper propose a Markov regime switching stochastic volatility model with state-dependent mean of volatility. On the basis of Bayesian analysis, we derive Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method to estimate this regime switching stochastic volatility model, including Gibbs sampling method for parameter estimation and multi-step method called “forward filtering and backward sampling” for state variables of logarithm volatility and regimes. Using this model, we analyze weekly returns of Shanghai Stock Exchange and find that it describe volatility well, including capturing time-varying, clustering and nonlinear features of volatility, and describing regime switching process of low-high volatility of Shanghai Stock Exchange.

Key words: regime switching, stochastic volatility model, Gibbs sampling, MCMC

0 引言

自 Taylor 的研究以来^[1], 随机波动模型已成为模拟时变方差、捕捉金融资产收益率序列波动聚类 and 尖峰分布的一种有效工具, 并与 Engle^[2] 和 Bollerslev^[3] 提出的自回归条件异方差

收稿日期: 2008年11月20日

收到修改稿日期: 2009年8月3日

基金项目: 吉林大学“211”工程和“985工程”建设项目、教育部人文社会科学重点研究基地重大课题项目(2007JJD790125)、教育部人文社会科学研究项目应急项目资助。

(ARCH) 类模型一样构成了波动与风险度量的最为广泛的模型之一。由于随机波动模型与连续时间的扩散过程 (如用于期权定价中) 密切相关, 所以近年来越来越多的研究关注于此类模型。而且, 许多经验研究表明随机波动模型要比 ARCH 和 GARCH 模型更好, 主要表现在对金融数据尖峰宽尾性的描述和对波动的预测能力上, 这类研究如 Geweke^[4]、Kim 等^[5] 和 Chib 等^[6], 国内研究如苏卫东和张世英^[7]、余素红和张世英^[8]、王春峰等^[9]。

随机波动模型研究中的一个重要发现就是当忽略金融市场高频数据的波动过程存在结构性转变或非线性时, 真实的持续性就可能被高估, 见 Lamoureux 和 Lastrapes^[10]。因此, 借助 Hamilton^[11] 提出的 Markov 区制转移模型, 非线性结构被考虑到随机波动模型的研究中来, 这也可以看作为该模型进行非线性推广的自然模式之一, 相关研究可见 Kalimipalli 和 Susmel^[12] 和 Sun^[13]。这类区制转移随机波动模型不仅是解释波动持续性的一个更好方法而且也是根据经济力量或市场事件的突发性变化捕捉波动过程运动的有效工具。

随机波动模型的最大困难就在于模型估计, 这是因为在模型中引入潜在波动过程导致似然函数依赖于高维积分。尽管当前已存在许多近似估计方法来解决这个问题, 如 Melino 和 Turnbull^[14] 的广义矩方法 (GMM)、Harvey 等^[15] 的半极大似然 (QML) 方法以及 Gallant 等^[16] 的有效矩方法 (EMM), 但是 Jacquier 等^[17] 和 Kim 等^[5] 提出的马尔可夫链蒙特卡洛模拟 (MCMC) 却是最有效且应用最广的方法。

本文利用 Markov 区制转移对随机波动模型进行推广, 考虑随机波动过程的均值参数是状态相依的, 即低波动状态和高波动状态。通过贝叶斯分析, 我们给出了对区制转移随机波动模型的 MCMC 估计方法, 其中对参数采用 Gibbs 抽样估计方法, 对潜在对数波动和区制的状态变量采用“向前滤波、向后抽样”的估计方法, 分别基于 Carter 和 Kohn^[18] 的卡尔曼滤波技术和 Kim 等^[5] 的 Hamilton 滤波技术, 此外采用 7 个混合正态分布近似逼近对数残差平方 $\log \varepsilon_t^2$ 的非线性非高斯分布。选取我国上证综合指数从 1997 年 1 月 3 日至 2007 年 11 月 24 日的周收益率, 我们对随机波动模型进行了实证应用分析。

在第二部分我们将给出基于 Markov 区制转移随机波动模型的基本形式。第三部分给出关于这个模型的贝叶斯分析以及 MCMC 估计方法。第四部分采用沪市综指对数收益率数据对区制转移随机波动模型进行实证分析。最后部分是本文的结论。

1 区制转移随机波动 (MSSV) 模型

在给出区制转移随机波动模型之前, 我们先回顾传统意义上线性形式的随机波动模型。根据 Taylor^[1]、Jacquier 等^[17] 和 Kim 等^[5] 给出的基本随机波动模型, 我们考虑含波动均值 α 的随机波动模型, 其形式为:

$$y_t = \exp(h_t/2)\varepsilon_t, \quad (1)$$

$$h_t = \alpha + \beta(h_{t-1} - \alpha) + \sigma\eta_t, \quad (2)$$

其中 $\{y_t\}$ 为时刻 $1 \rightarrow T$ 的观测序列, 过程 $\{\varepsilon_t\}$ 和 $\{\eta_t\}$ 均服从独立同分布 $N(0, 1)$ 且相互之间独立, (α, β, σ) 为待估参数。对数波动 h_t 被假设服从为一个具有持续性参数为 β 的 AR(1) 过程, 是不可观测变量; 对于 $|\beta| < 1$, 对数收益率的对数波动是严格平稳的; 参数 α 度量波动冲击的标准差且被假设为大于零。

在本文中, 我们从 Markov 区制转移的角度研究随机波动模型, 以便捕捉波动过程中潜在不可见的经济状态变化。为捕捉波动过程中呈现的不同聚类性质和状态转换过程, 我们结合 Hamilton^[11] 应用于美国经济周期研究的 Markov 区制转移模型, 即考虑对数波动过程的均值

是随状态变化的. 因此, 我们假设随机波动过程中 (2) 式的均值常数 α 是状态相依的, 并且可将 (1) 和 (2) 式表示为状态空间形式, 如下:

$$\text{量测方程: } \log y_t^2 = h_t + \log \varepsilon_t^2, \quad (3)$$

$$\text{转移方程: } h_t = \alpha_{S_t} - \beta \alpha_{S_{t-1}} + \beta h_{t-1} + \sigma \eta_t, \quad (4)$$

$$\alpha_{S_t} = \alpha_0 + \alpha_1 S_t, \quad (5)$$

其中 $\alpha_1 > 0$. 区制变量 S_t 的取值为 0 或 1, 服从于一阶 Markov 过程, 其具有转移概率为:

$$\begin{aligned} P(S_t = 0 | S_{t-1} = 0) &= p_{00}, & P(S_t = 1 | S_{t-1} = 0) &= 1 - p_{00}, \\ P(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) &= p_{11}, & P(S_t = 0 | S_{t-1} = 1) &= 1 - p_{11}. \end{aligned} \quad (6)$$

对于区制转移随机波动模型来说, 当 $S_t = 0$ 时, 对数波动过程处于低波动状态, 其对数波动均值为 α_0 , 而当 $S_t = 1$ 时, 对数波动过程相反处于高波动状态, 其对数波动均值为 $\alpha_0 + \alpha_1$.

2 贝叶斯分析与 MCMC 估计

2.1 贝叶斯分析

假设参数空间为 $\Theta = (\alpha', \beta, \sigma^2, p_{00}, p_{11})$, 其中 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)'$, 状态变量 $\Xi = (H, S)$, $H_t = \{h_1, \dots, h_t\}$ 且 $H = H_T$, $S_t = \{S_1, \dots, S_t\}$ 且 $S = S_T$, 观测变量 $Y_t = \{y_1, \dots, y_t\}$ 且 $Y = Y_T$. 模型的后验密度为:

$$\begin{aligned} p(\Theta, \Xi | Y) &= p(\Theta, H, S | Y) \\ &\propto p(Y | \Theta, H, S) p(\Theta, H, S) \\ &\propto p(Y | \Theta, H, S) p(H | \Theta, S) p(S | \Theta) p(\Theta). \end{aligned} \quad (7)$$

在第二行中应用了贝叶斯法则, 第三行由条件概率定义得到.

在 (7) 式第三行中, 第一项 $p(Y | \Theta, H, S)$ 表示给定 Θ, H 和 S 下 Y 的密度函数, 为:

$$p(Y | \Theta, H, S) = p(Y | H) = \prod_{t=1}^T p(y_t | h_t) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{h_t}}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2e^{h_t}}\right). \quad (8)$$

第二项 $p(H | \Theta, S)$ 表示给定 Θ 和 S 下 H 的密度函数, 为:

$$\begin{aligned} p(H | \Theta, S) &= p(H | \Theta_{-(p_{00}, p_{11})}, S) \\ &= \prod_{t=1}^T p(h_t | \alpha, \beta, \sigma^2, S_t, S_{t-1}) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(h_t - \alpha_{S_t} - \beta(h_{t-1} - \alpha_{S_{t-1}}))^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

同样, 这里使用了 H 不依赖于参数 p_{00}, p_{11} 的事实, 其中 $\Theta_{-(p_{00}, p_{11})}$ 表示剔除参数 p_{00} 和 p_{11} .

第三项为 $p(S | \Theta)$, 即给定参数信息条件 Θ 下 S 的似然函数, 这里考虑为 S 的先验密度. 注意到由于 S 只依赖于 p_{00}, p_{11} , 所以有

$$p(S | \Theta) = p(S | p_{00}, p_{11}) = \prod_{t=1}^T p(S_{t+1} | S_t, p_{00}, p_{11}) = p_{00}^{n_{00}} (1 - p_{00})^{n_{01}} p_{11}^{n_{10}} (1 - p_{11})^{n_{11}}, \quad (10)$$

其中 η_{ij} 指从状态 i 转移到状态 j 的数目。这个结果是根据 S 的 Markov 性质得到的。

方程 (7) 中的最后一项 $p(\Theta)$ 为参数的先验密度, 所有参数都可以直接获得对应的共轭先验密度, 表示如下:

$$\begin{aligned} p(\Theta) &= p(\alpha)p(\beta)p(\sigma^2)p(p_{00})p(p_{11}) \\ &\sim N(\mu_\alpha, \Sigma_\alpha) \times N(\mu_\beta, \Sigma_\beta) \times \mathcal{IG}(n_0/2, \delta_0/2) \times \mathcal{B}(u_{00}, u_{01}) \times \mathcal{B}(u_{11}, u_{10}), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $N(\cdot)$ 为正态密度函数, $\mathcal{IG}(\cdot)$ 为逆伽马 (Inverse Gamma) 密度函数且 $\mathcal{B}(\cdot)$ 为贝塔 (Beta) 密度函数。

2.2 MCMC 估计方法

注意到在量测方程 (3) 中 $\log \varepsilon_t^2$ 的分布是非线性非高斯分布, 无法直接对 $\{h_t\}_{t=1}^T$ 进行抽样, 此时可以根据 Titterton 等^[19] 用 7 个正态分布的混合分布对该未知分布近似逼近。混合分布可表示为: $\log \varepsilon_t^2 \simeq Z_t \sim N(m_{t,D_t}, \sigma_{t,D_t}^2)$, $\Pr(D_t = i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, 7$, 其中 D_t 表示指示变量且混合分布的均值 m_{t,D_t} 和方差 σ_{t,D_t}^2 均已知。于是当 $D_t = i$ 时, $\log \varepsilon_t^2 \simeq m_{t,i} + \sigma_{t,i}\varepsilon_t$ 。 $\{D_t\}_{t=1}^T$ 是待估计的变量, 可以将 D 并入后验分布 $p(\Theta, H, S|Y)$ 的估计中, 其中 $D_t = \{D_1, \dots, D_t\}$ 且 $D = D_T$ 。由 Hammersley-Clifford 定理可知, 后验分布 $p(\Theta, D, H, S|Y)$ 可表示为各个对应边际分布的乘积。

后验分布 $p(\Theta, D, H, S|Y)$ 可成块地划分为几个部分, 并依据不同的 MCMC 方法进行抽样。这里对状态变量 $\{h_t\}_{t=1}^T$ 和 $\{S_t\}_{t=1}^T$ 的抽取既可以采用单步移动 (single-move) 方法, 也可以使用多步移动 (multi-move) 方法。对于状态变量 $\{h_t\}_{t=1}^T$, 由于单步移动方法每次只能抽样一个元素并使用独立 Metropolis-Hastings 算法 (见 Jacquier 等^[17]) 中, 导致计算过程非常耗时, 收敛速度较慢, 所以一般采取结合卡尔曼滤波的多步移动方法。同样, 在大多数情形下, 对于状态变量 $\{S_t\}_{t=1}^T$ 的抽样, 结合 Hamilton 滤波的多步移动方法要明显优于单步移动方法, 见 Kim 等^[5]。因此, 本文将都采用多步移动方法对状态变量 $\{h_t\}_{t=1}^T$ 和 $\{S_t\}_{t=1}^T$ 进行抽样。

具体的 MCMC 算法为:

- ① 设定初始值: $H^0 = \{h_t^0\}_{t=1}^T$, $\Theta^0 = \{\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \sigma^{2(0)}, p_{00}^{(0)}, p_{11}^{(0)}\}$, 且 $g = 0$;
- ② 运用多步移动方法从分布 $p(S|\alpha^{(g)}, \beta^{(g)}, \sigma^{2(g)}, p_{00}^{(g)}, p_{11}^{(g)}, H^{(g)})$ 成块抽取 $\{S_t^{(g+1)}\}_{t=1}^T$;
- ③ 从分布 $p(p_{00}, p_{11}|S^{(g+1)})$ 抽取 $p_{00}^{(g+1)}$ 和 $p_{11}^{(g+1)}$;
- ④ 运用 Griddy-Gibbs 从分布 $p(D|Y, H^{(g)})$ 抽取 $\{D_t^{(g+1)}\}_{t=1}^T$;
- ⑤ 运用多步移动方法从分布 $p(H|Y, \alpha^{(g)}, \beta^{(g)}, \sigma^{2(g)}, D^{(g+1)}, S^{(g+1)})$ 成块抽取 $\{h_t^{(g+1)}\}_{t=1}^T$;
- ⑥ 从分布 $p(\alpha_0, \alpha_1|\beta^{(g)}, \sigma^{2(g)}, H^{(g+1)}, S^{(g+1)})$ 抽取 $\alpha_0^{(g+1)}$ 和 $\alpha_1^{(g+1)}$;
- ⑦ 从分布 $p(\beta|\alpha^{(g+1)}, \sigma^{2(g)}, H^{(g+1)}, S^{(g+1)})$ 抽取 $\beta^{(g+1)}$;
- ⑧ 从分布 $p(\sigma^2|\alpha^{(g+1)}, \beta^{(g+1)}, H^{(g+1)}, S^{(g+1)})$ 抽取 $\sigma^{2(g+1)}$;
- ⑨ 令 $g = g + 1$, 并返回第②步。

为简化起见, 以上的分布表示法均直接考虑了条件密度的相依性, 非相依的参数或变量已直接从条件密度中舍去。

2.2.1 生成 $\{S_t\}_{t=1}^T$

对于状态相依的 Markov 转移模型, Kim 等^[5] 根据 Carter 和 Kohn^[18] 的多步移动方法实现了从联合条件分布中成块抽样状态变量 $\{S_t\}_{t=1}^T$ 。在给定模型参数的条件下, 考虑下面关于

联合条件密度的推导:

$$\begin{aligned} p(S_T|H) &= p(S_1, S_2, \dots, S_T|H) \\ &= p(S_T|H)p(S_{T-1}|S_T, H) \cdots p(S_1|S_T, S_{T-1}, \dots, S_2, H) \\ &= p(S_T|H_T) \prod_{t=1}^{T-1} p(S_t|S_{t+1}, H_t). \end{aligned} \quad (12)$$

第二行由条件概率定义得到, 第三行依赖于 S_t 的 Markov 性质, 例如基于 S_{t+1} 下 S_t 的密度不包含 S_{t+2}, \dots, S_T 和 h_{t+1}, \dots, h_T 的信息. (12) 式表明可以先基于 H_T 生成 S_T , 然后对 $t = T-1, \dots, 1$, 基于 H_t 和已生成的 S_{t+1} 生成 S_t . 将贝叶斯法则用于 $p(S_t|S_{t+1}, H_t)$, 我们得到:

$$p(S_t|S_{t+1}, H_t) \propto p(S_t, S_{t+1}|H_t) = p(S_{t+1}|S_t)p(S_t|H_t), \quad (13)$$

其中 $p(S_{t+1}|S_t)$ 为转移概率, $p(S_t|H_t)$ 为 t 时刻的滤子概率. 因此, 该式表明可以通过 Hamilton^[11] 滤波先获得概率 $p(S_t|H_t)$, 再计算概率 $p(S_t|S_{t+1}, H_t)$. 最后, 我们计算概率值 $p(S_T = 1|H_T)$ 和 $\{p(S_t = 1|S_{t+1}, H_t)\}_{t=1}^{T-1}$, 并从 $(0,1)$ 分布中抽取一个随机数来生成 S_t .

2.2.2 生成 p_{00} 和 p_{11}

p_{00} 的条件分布给出为

$$\begin{aligned} p(p_{00}|S) \propto p(S|p_{00})p(p_{00}) &= p_{00}^{u_{00}-1}(1-p_{00})^{u_{01}-1}p_{00}^{\eta_{00}}(1-p_{00})^{\eta_{01}} \\ &= p_{00}^{u_{00}+\eta_{00}-1}(1-p_{00})^{u_{01}+\eta_{01}-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

这是一个 Beta 分布密度函数, 可从 Beta 分布中 Gibbs 抽样 p_{00} :

$$p_{00}|S \sim B(u_{00} + \eta_{00}, u_{01} + \eta_{01}). \quad (15)$$

同样地, p_{11} 可如下抽样:

$$p_{11}|S \sim B(u_{11} + \eta_{11}, u_{10} + \eta_{10}). \quad (16)$$

2.2.3 生成 $\{D_t\}_{t=1}^T$

D_t 表示 7 个正态的混合分布的指示变量, 其依赖于观测值序列 Y 和不可观测变量 H , 因此 D_t 的后验分布表示为:

$$\begin{aligned} p(D|Y, H) &= \prod_{t=1}^T p(D_t|y_t, h_t) \propto \prod_{t=1}^T p(y_t|D_t, h_t) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Z, D_t}^2}} \exp\left(-\frac{(\log y_t^2 - h_t^2 - m_{Z, D_t})^2}{2\sigma_{Z, D_t}^2}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

这里, 我们可以采用 Griddy-Gibbs 抽样方法生成 $\{D_t\}_{t=1}^T$, 具体步骤如下:

- ① 设定初始值 $t = 1$.
- ② 计算权值 $w_{ti} = f_{ti} / \sum_{i=1}^7 f_{ti}$, 其中 $f_{ti} = p(D_t = i)p(y_{tt}|D_t = i, h_t)$, $i = 1, 2, \dots, 7$.
- ③ 用 w_{t1}, \dots, w_{t7} 获得对 $p(D_t|y_t, h_t)$ 的逆累积分布函数 (CDF) 的近似.

- ④抽取一个 $(0,1)$ 分布随机数并借助近似逆 CDF 变换观测值获得对指示变量 D_t 的抽样。
 ⑤令 $t = t + 1$, 并返回第②步, 直到 $t = T$ 为止。

2.2.4 生成 $\{h_t\}_{t=1}^T$

在给定模型参数、变量 $\{D_t\}_{t=1}^T$ 和变量 $\{h_t\}_{t=1}^T$ 下, 状态空间模型就简化为:

$$\text{量测方程: } \tilde{y}_t = \tilde{m}_t + h_t + \tilde{\sigma}_t \epsilon_t, \quad (18)$$

$$\text{转移方程: } h_t = \hat{\mu}_t + \beta h_{t-1} + \sigma \eta_t, \quad (19)$$

其中 \tilde{m}_t 和 $\tilde{\sigma}_t$ 依赖于指示变量 D_t , $\hat{\sigma}_t$ 依赖于状态变量 S_t 和 S_{t-1} , 且 β, σ 为已知参数。因此, 该模型表示就是一个标准的时变参数状态空间表示。按照 Carter 和 Kohn^[18] 提出的“向前滤波、向后抽样”的多步移动方法, 我们可以从联合分布中整体地抽样 $\{h_t\}_{t=1}^T$ 。具体步骤如下:

①顺序卡尔曼滤波迭代 $\{h_{t|t}\}_{t=1}^T$ 和 $\{P_{t|t}\}_{t=1}^T$, 这里 $h_{t|t} = E(h_t|h_{t|t-1}, \tilde{y}_t) = h_{t|t-1} + P_{t|t-1} f_{t|t-1}^{-1} \eta_{t|t-1}$, 信息 $P_{t|t} = \text{Cov}(h_t|h_{t|t-1}, \tilde{y}_t) = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} f_{t|t-1}^{-1} P_{t|t-1}$, 其中 $h_{t|t-1} = \hat{\mu}_t + \beta h_{t-1|t-1}$, $P_{t|t-1} = \beta^2 P_{t-1|t-1} + \sigma^2$, $\eta_{t|t-1} = \tilde{y}_t - \tilde{m}_t - h_{t|t-1}$ 且 $f_{t|t-1} = P_{t|t-1} + \tilde{\sigma}_t^2$ 。

②逆序卡尔曼滤波迭代 $\{h_{t|t, h_{t+1}}\}_{t=1}^{T-1}$ 和 $\{P_{t|t, P_{t+1}}\}_{t=1}^{T-1}$, 这里 $h_{t|t, h_{t+1}} = h_{t|t} + P_{t|t} \beta f_{t+1|t}^*{}^{-1} \eta_{t+1|t}^*$, 信息 $P_{t|t, P_{t+1}} = P_{t|t} - P_{t|t} f_{t+1|t}^*{}^{-1} P_{t|t}$, 其中 $f_{t+1|t}^* = \beta^2 P_{t+1|t} + \sigma^2$ 且 $\eta_{t+1|t}^* = h_{t+1} - \hat{\mu}_{t+1} - \beta h_{t|t}$, $h_{t|t}$ 和 $P_{t|t}$ 由第①步获得。

③从分布 $N(h_{T|T}, P_{T|T})$ 和 $N(h_{t|t, h_{t+1}}, P_{t|t, P_{t+1}})$, $t = T-1, \dots, 1$ 中分别抽取 h_T 和 $\{h_t\}_{t=1}^{T-1}$ 。

2.2.5 生成 α_0 和 α_1

给定状态变量 S, H 和参数 β, σ^2 , 我们可以将 (4) 式重新整理得到:

$$y_t^* = X_{0t}^* \alpha_0 + X_{1t}^* \alpha_1 + \eta_t, \quad (20)$$

其中 $y_t^* = h_t - \beta h_{t-1}$, $X_{0t}^* = 1 - \beta$, $X_{1t}^* = S_t - \beta S_{t-1}$ 。参数 α_0, α_1 的后验密度为:

$$\begin{aligned} p(\alpha|\beta, \sigma^2, H, S) &\propto p(H|\alpha, \beta, \sigma^2, S) p(\alpha) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_t^* - X_{0t}^* \alpha_0 - X_{1t}^* \alpha_1)^2\right) p(\alpha), \end{aligned} \quad (21)$$

$p(\alpha)$ 为 α 的先验密度。令 $Y_\alpha = (y_1^*, \dots, y_T^*)'$, $X_\alpha = (X_{11}^*, \dots, X_{1T}^*)'$, $X_t^* = (X_{0t}^*, X_{1t}^*)'$ 。于是, 我们可从以下分布抽取参数 α_0 和 α_1 :

$$\alpha_0, \alpha_1 | \beta, \sigma^2, H, S \sim N(\hat{\mu}_\alpha, \hat{\Sigma}_\alpha), \quad (22)$$

其中 $\alpha_1 > 0$, $\hat{\mu}_\alpha = \hat{\Sigma}_\alpha (\Sigma_\alpha^{-1} \mu_\alpha + \sigma^{-2} X_\alpha' Y_\alpha)$, $\hat{\Sigma}_\alpha = (\Sigma_\alpha^{-1} + \sigma^{-2} X_\alpha' X_\alpha)^{-1}$, $N(\mu_\alpha, \Sigma_\alpha)$ 为共轭先验分布。

2.2.6 生成 β

给定状态变量 S, H 和参数 α, σ^2 , 我们可以将 (4) 式重新整理得到:

$$y_t^{**} = \beta X_t^{**} + \eta_t, \quad (23)$$

其中 $y_t^{**} = h_t - \alpha_0 - \alpha_1 S_t$, $X_t^{**} = h_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 S_{t-1}$. 参数 β 的后验密度为:

$$\begin{aligned} p(\beta|\alpha_0, \alpha_1, \sigma^2, H, S) &\propto p(H|\alpha_0, \alpha_1, \beta, \sigma^2, S)p(\beta) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_t^{**} - \beta X_t^{**})^2\right) p(\beta), \end{aligned} \quad (24)$$

$p(\beta)$ 为 β 的先验密度. 令 $Y_\beta = (y_1^{**}, \dots, y_T^{**})'$, $X_\beta = (X_1^{**}, \dots, X_T^{**})'$. 于是, 我们可从以下分布抽取参数 β :

$$\beta|\alpha_0, \alpha_1, \sigma^2, H, S \sim N(\hat{\mu}_\beta, \hat{\Sigma}_\beta)I_{(\beta < 1)}, \quad (25)$$

其中示性函数 $I_{(\beta < 1)}$ 表示满足 $\beta < 1$ 时取值为 1, 所以 β 的后验分布为截断的正态分布, 且 $\hat{\mu}_\beta = \hat{\Sigma}_\beta(\Sigma_\beta^{-1}\mu_\beta + X'_\beta Y_\beta)$, $\hat{\Sigma}_\beta = (\Sigma_\beta^{-1} + X'_\beta X_\beta)^{-1}$, $N(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$ 为共轭先验.

2.2.7 生成 σ^2

给定状态变量 S 、 H 和参数 α 、 β , 我们可以将 (4) 式重新整理得到: $u_t^* = \sigma\eta_t$, 其中 $u_t^* = h_t - \alpha_0 - \alpha_1 S_t - \beta(h_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 S_{t-1})$. 参数 σ^2 的后验密度为:

$$p(\sigma^2|\alpha, \beta, H, S) \propto p(H|\alpha, \beta, \sigma^2, S)p(\sigma^2) \propto \prod_{t=1}^T (\sigma^2)^{-0.5} \exp\left(-\frac{u_t^{*2}}{2\sigma^2}\right) p(\sigma^2), \quad (26)$$

$p(\sigma^2)$ 为 σ^2 的先验密度. 于是, 我们可从以下分布抽取参数 σ^2 :

$$\sigma^2|\alpha, \beta, H, S \sim IG(n_1/2, \delta_1/2), \quad (27)$$

其中 $n_1 = n_0 + T$, $\delta_1 = \delta_0 + \sum_{t=1}^T u_t^{*2}$, $IG(n_0/2, \delta_0/2)$ 为共轭先验.

3 具有区制转移过程的随机波动模型在我国沪市收益率序列中的经验研究

下面我们利用上述区制转移随机波动模型进行时间序列的经验研究. 我们采用上证综合指数从 2000 年 1 月 4 日至 2008 年 10 月 24 日的收盘价周数据. 在该样本时期内, 由于我国股票市场处于同一涨跌停板制度下, 上证综指变动相对缓和, 所以不会影响区制转移随机波动模型的估计.

一般地, 资产对数收益率的计算公式为:

$$y_t = 100(\log P_t - \log P_{t-1}), \quad (28)$$

其中 P_t 为 t 时刻的收盘价.

在金融理论和经验分析中的一个常见的假设就是对数收益率是服从正态分布的, 然而实际上的金融收益率往往是服从非正态分布的, 上证综合指数收益也不例外. 经计算, 该分布的偏度为 $0.2175 > 0$, 且峰度为 $4.2211 > 3$, 所以表明上证综合指数周对数收益率是右偏的尖峰分布. Jarque-Bera 检验统计量也明显拒绝上证综合指数收益服从正态分布的原假设. 因此, 我们可以运用 ARCH 类模型或随机波动 (SV) 模型来刻画这种尖峰宽尾的非正态分布.

本文在随机波动模型的基础上引入 Markov 转移结构, 由此分析我国沪市综指对数收益率的条件波动性和非线性特征. 按照本文前面的方法, 我们采用 MCMC 估计方法对上证综指对数收益率数据的区制转移随机波动模型进行估计. 模型估计过程中, 总共迭代了 5100 次, 其中前 2100 次考虑收敛问题而舍去, 有效迭代次数为 3000 次.

表 1 给出了区制转移模型的参数估计结果, 第 2 和 3 列为 Gibbs 抽样估计时的先验值, 第 4 至 6 列为参数的后验估计值, 包括参数后验均值、标准差和 90% 置信区间。从结果中可以看出, 所有参数后验均值在 5% 水平下都显著。图 1 继续给出这些参数后验估计值的分布密度和柱状图。从图中可以看出, 分别满足 $\alpha_1 > 0$ 和 $\beta < 1$, 且 σ^2 的分布密度符合逆卡方分布。

表 1 区制转移随机波动模型估计

参数	先验值		后验值		
	均值	标准差	均值	标准差	90% 置信区间
p_{00}	0.96	-	0.9396	0.0331	[0.8820, 0.9780]
p_{11}	0.96	-	0.9211	0.0427	[0.8427, 0.9743]
α_0	1.90	0.1	2.0133	0.0846	[1.8753, 2.1539]
α_1	0.90	0.1	0.9874	0.0915	[0.8375, 1.1372]
β	0.60	0.1	0.5799	0.1026	[0.4126, 0.7518]
σ	-	-	0.2377	0.0804	[0.1105, 0.3753]

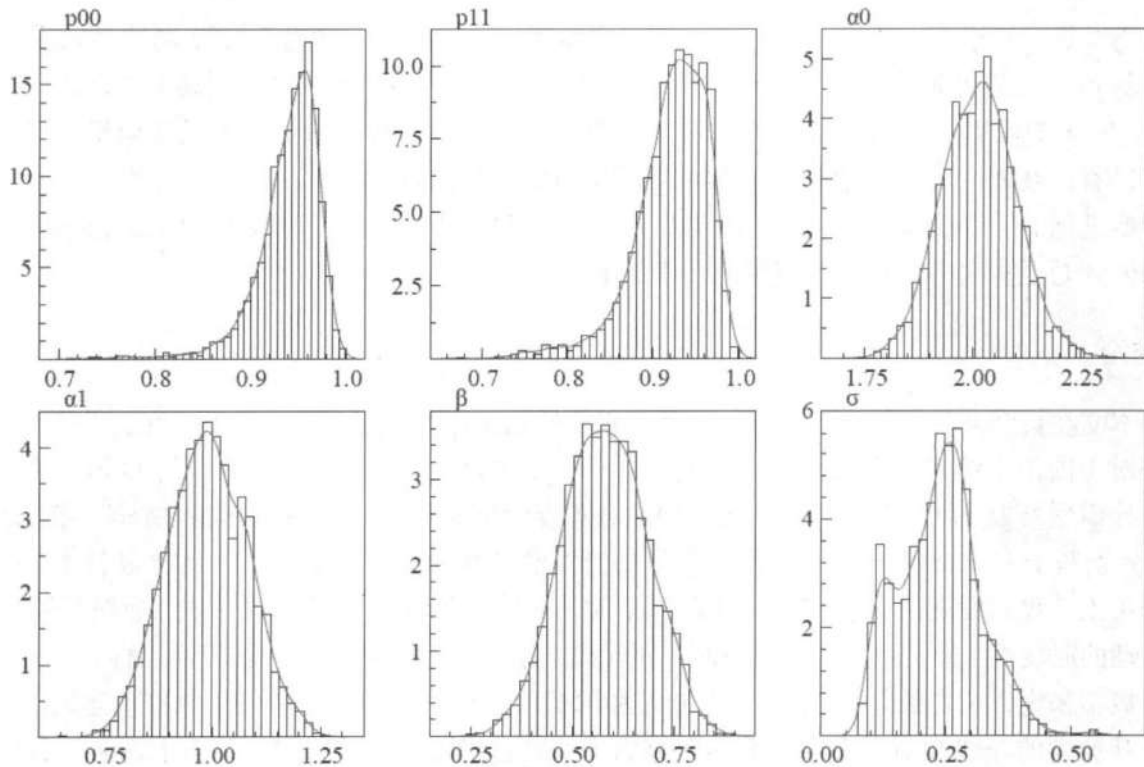


图 1 参数的后验分布密度与柱状图

前面结果表明, 沪市综指数收益率序列的对数波动存在非线性效应, 即波动具有区制转移性质。当 $S_t = 0$ 时, 波动过程处于低波动状态, 其波动的均值为 $e^{\alpha_0} = 7.4880$, 而当 $S_t = 1$ 时, 波动过程则处于高波动状态, 其波动的均值为 $e^{\alpha_0 + \alpha_1} = 20.0996$ 。波动过程的低、高波动状态的期望持续期 $E(\text{Duration}) = 1/(1 - p_{ii})$, $i = 0, 1$ 分别为 16.5563 和 12.6743, 即低波动状态期望持续期要明显大于高波动状态期望持续期, 这个结果在一定意义上反映了条件波动过程状态转换的非对称性。

通过区制转移随机波动模型估计, 我们还可以获得状态变量 h_t 和平滑概率 $\text{Pr}(S_t = 1|Y_T)$ 的后验估计值。在图 2 中我们给出了沪市含有 (5%, 95%) 可信集的潜在波动的后验估计值 $E(\exp(h_t)|Y_T)$, 图中实线部分表示条件波动的均值, 虚线部分为条件波动 5% 至 95% 的置信区间, 这直接反映出蒙特卡洛方法在条件波动估计中的风险。从该图中, 我们可以看出沪市

波动呈现较强的聚类效应,即在波动幅度较大变化后面则往往还跟着波动幅度较大的变化,波动幅度较小的变化后面也往往跟着波动幅度较小的变化。

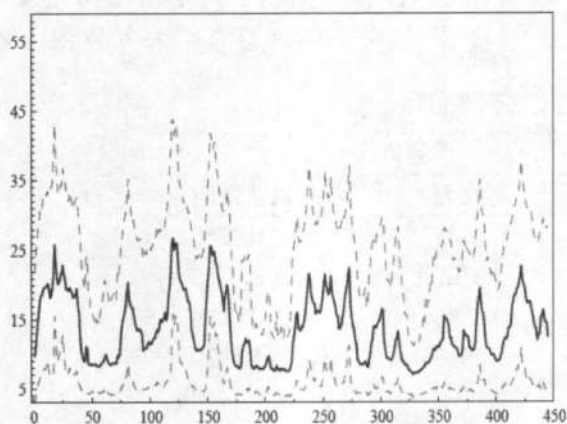


图 2 沪市随机波动 $\exp(h_t)$ 的估计值

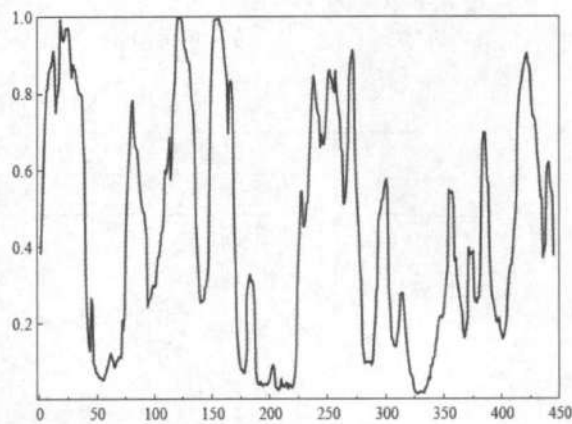


图 3 沪市高波动区制的平滑概率 $\Pr(S_t = 1|Y_T)$

图 3 进一步给出了状态变量 $S_t = 1$ 时平滑概率 $\Pr(S_t = 1|Y_T)$ 的估计值,即沪市处于高波动区制 $S_t = 1$ 的可能性,当 $\Pr(S_t = 1|Y_T) \geq 0.5$ 时,可以认为沪市波动处于高波动状态,反之当 $\Pr(S_t = 1|Y_T) < 0.5$ 时可以认为沪市处于低波动状态。与图 2 中潜在随机波动相比较,我们可以看出在每个时刻平滑概率值都对应了沪市的高低波动位置,由此较好地捕捉了波动状态转换过程的区制转移性质。在经济学意义上,这些高低波动的转换反映了该时期金融政策、金融体制乃至重大事件对股票市场的冲击影响。

4 结论

本文在贝叶斯分析基础上提出一种区制转移随机波动模型估计的 MCMC 方法,并利用该方法对中国沪市综指数收益率进行实证分析。在估计方法上,我们参数采用 Gibbs 抽样方法估计模型参数,对潜在对数波动和区制的状态变量则采用“向前滤波、向后抽样”的估计方法,分别基于 Carter 和 Kohn^[18] 的卡尔曼滤波技术和 Kim 等^[5] 的 Hamilton 滤波技术。在实证结果上,我们发现区制转移随机波动模型对沪市综指波动性有较好的描述,捕捉了股票市场波动的时变性、聚类性和非线性特征,同时刻画了沪市的高低波动状态转换过程。

概括来说,本文提出的 Markov 区制转移随机波动模型为研究金融资产收益动态风险,特别是其波动的非线性情形提供了新的研究内容。尽管在方法研究上我们给出了区制转移随机波动模型的估计,但不乏存在一些不足,如该模型与其它描述波动模型的适用性比较、Markov 区制个数的设定检验以及随机波动模型是否存在其它诸如门限模型的非线性形式等,因此这些问题也将成为日后继续深入研究的方向。

[参考文献]

- [1] Taylor S J. Financial returns modelled by the product of two stochastic processes—a study of daily sugar prices [A]. In: Anderson, O.D. (Ed.). Time Series Analysis: Theory and Practice 1 [M]. Amsterdam: North-Holland, 1982: 203–226.
- [2] Engle R. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation [J]. Econometrica, 1982, 50: 987–1008.
- [3] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [J]. Journal of Econometrics,

- 1986, 31: 307-327.
- [4] Geweke J F. Bayesian comparison of econometric models [R]. Federal Reserve Bank of Minneapolis Research Department working paper 532, 1994.
- [5] Kim S, Shephard N, and Chib S. Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models [J]. *Review of Economic Studies*, 1998, 65: 361-393.
- [6] Chib S, Nardari F, and Shephard N. Markov chain Monte Carlo methods for stochastic volatility models [J]. *Journal of Econometrics*, 2002, 108: 281-316.
- [7] 苏卫东, 张世英. 随机波动模型分析及其在上海股市的应用 [J]. *系统工程理论方法应用*, 2001, 10(3): 202-205.
- [8] 余素红, 张世英. SV 和 GARCH 模型拟合优度比较的似然比检验 [J]. *系统工程学报*, 2004, 19(6): 625-629.
- [9] 王春峰, 蒋祥林, 吴晓霖. 随机波动性模型比较分析 [J]. *系统工程学报*, 2005, 20(2): 216-219.
- [10] Lamoureux C and Lastrapes W. Persistence in variance, structural change and the Garch model [J]. *Journal of Business Economics and Statistics*, 1990, 8: 225-234.
- [11] Hamilton J. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle [J]. *Econometrica*, 1989, 57: 357-384.
- [12] Kalimipalli M and Susmel R. Regime-switching stochastic volatility and short-term interest rates [J]. *Journal of Empirical Finance*, 2004, 11: 309-329.
- [13] Sun L. Regime shifts in interest rate volatility [J]. *Journal of Empirical Finance*, 2005, 12: 418-434.
- [14] Melino A and Turnbull S M. Pricing foreign currency options with stochastic volatility [J]. *Journal of Econometrics*, 1990, 45: 239-265.
- [15] Harvey A C, Ruiz E and Shephard N. Multivariate stochastic variance models [J]. *Review of Economic Studies*, 1994, 61: 247-264.
- [16] Gallant A R, Hsieh D A and Tauchen G E. Estimation of stochastic volatility models with diagnostics [J]. *Journal of Econometrics*, 1997, 81: 159-192.
- [17] Jacquier E, Polson N G and Rossi P E. Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion) [J]. *Journal of Business and Economics Statistics*, 1994, 12: 371-389.
- [18] Carter C K and Kohn R. On Gibbs sampling for state space models [J]. *Biometrika*, 1994, 81(3): 541-553.
- [19] Titterton D M, Smith A F & Markov U E. *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions* [M]. New York: Wiley, 1985.