

基于极值分布理论的 VaR 与 ES 度量^①

陈守东^{1,2} 孔繁利² 胡铮洋²

(1. 吉林大学数量经济研究中心; 2. 吉林大学商学院)

【摘要】 本文应用极值分布理论对金融收益序列的尾部进行估计, 计算收益序列的在险价值 VaR 和预期不足 ES 来度量市场风险。通过伪最大似然估计方法估计的 GARCH 模型对收益数据进行拟合, 应用极值理论中的 GPD 对新息分布的尾部建模, 得到了基于尾部估计产生收益序列的 VaR 和 ES 值。采用上证指数日对数收益数据为样本, 得到了度量条件极值和无条件极值下 VaR 和 ES 的结果。实证研究表明: 在置信水平很高 (如 99%) 的条件下, 采用极值方法度量风险值效果更好。而置信水平在 95% 下, 其他方法和极值方法结合效果会很好。用 ES 度量风险能够使我们了解不利情况发生时风险的可能情况。

关键词 极值分布 在险价值 (VaR) 预期不足 (ES) GARCH 模型
中图分类号 F830.91 **文献标识码** A

Computing VaR and ES Based-on EVT

Abstract: The paper is concerned with tail estimation for financial return series and, in particular, the estimation of market risk such as value at risk VaR or the expected shortfall. We fit GARCH-models to return data using pseudo maximum likelihood and use a GPD-approximation suggested by extreme value theory to model the tail of the distribution of the innovations. We find that a conditional approach that models the conditional distribution of asset returns against the current volatility background is better suited for VaR estimation than an unconditional approach that tries to estimate the marginal distribution of the process generating the returns. In the empirical research we choose Shanghai stock-market index and find that ES is more efficient than VaR.

Key words: Extreme Value Theory; VaR; Expected Shortfall; GARCH Model

引 言

在当前的金融创新环境下, 市场风险成为现代金融机构管理和监管的重点。20 世纪 90

^① 本文得到 2006 年国家社会科学基金项目 (06JY010)、2004 年教育部重大项目 (05JJD790005)、“吉林大学‘985 工程’项目”、吉林大学经济分析与预测创新基地资助。

年代中叶发生的几起震惊世界的银行和金融机构危机大案，巴林银行倒闭、大和银行破产使得人们对市场风险更加关注。一些著名的国际大银行开始研究、建立自己的内部风险测量、资本配置模型，以补足巴塞尔协议之不足，如 RiskMetrics 系统、RAROC 系统等。VaR (Value at Risk) 成为市场风险测量的主流方法与核心手段。一般来说金融资产收益的分布都是厚尾、尖峰分布，而现有的分布，尤其是广泛应用的正态分布，都与实际金融收益分布存在着较大的差距。极值理论中的 POT 模型仅考虑分布尾部，而不是对整个分布进行建模，这就避开了分布假设难题，并且极值理论可以准确地描述分布尾部的分位数，这有助于处理风险度量中的厚尾问题。

极值理论研究多应用在科技、工程等领域。随着理论的日益完善，Jenkinson 把该理论应用于极值风险研究，建立了广义极值分布 (Generalized Extreme Value Distribution) 模型，Pickands 等证明了经典的极限定理，该定理指出对超额数分布函数可以用广义 Pareto 分布拟合，为 20 世纪 80 年代、90 年代完善建模作出了巨大贡献。Longin 开辟了将极值理论用于风险管理的先河。Longin (1996) 考察了美国股票市场的极端变动，用极值理论已超过一个世纪之久 (1885~1990 年) 的每日观察值为样本，给市场回报的极端变动建模。从此以后，一些学者将这一方法用于其他股票市场，得到了很好的结果。Kearns (1997) 在样本数据相依情况下，对金融时间序列进行了研究，为进一步进行金融风险研究提供了建设性意见。Longin (2000) 系统而详细地介绍了用极值理论计算 VaR 的方法。Ho (2000) 应用这一方法研究了处于金融危机中的 6 个亚洲国家和地区的股票市场。Artzner 提出尽管 VaR 是测量风险的有用手段，但它本身也存在一些不足之处：一是没有考虑到尾部风险，即没有衡量高于 VaR 值的损失发生的可能性；二是它不满足次可加性 (sub-additive)，因而不是是一致的 (coherent) 风险度量工具。为弥补这些缺陷，Artzner 等 (1997, 1999) 提出了期望损失模型 ES (Expected Shortfall)，ES 模型度量的是损失超过 VaR 水平的条件期望值。ES 是在 VaR 概念基础上衍生出来的风险度量工具，它弥补了 VaR 不满足次可加性、没有考虑到尾部风险等缺陷，更接近于投资者真实心理感受。国内在极值领域方面的研究只是近几年的事情：朱国庆、张维等 (2001) 综述了极值理论在科技、工程等领域，特别是在金融风险管理领域的应用；周开国、缪柏其 (2002) 运用极值理论以香港恒生指数为样本进行实证分析，发现极值方法在度量风险时要明显优于方差—协方差方法；而杨耀辉等 (2004) 从收益率的波动性与分布两方面进行考虑，建立起计算时变风险值 VaR 和 ES 的模型，结果表明基于广义极值分布的 VaR 模型能够较好地刻画高频时间序列的尖峰厚尾性及杠杆效应等特性，而 ES 模型则有效地弥补了 VaR 模型的不足之处。

一、极值分布

研究极值分布的理论统称为极值理论，是概率论的一个重要分支，主要研究随机样本以及随机过程中极值的概率值以及统计推断，为了便于统计应用，Jenkinson (1955) 给出广义极值分布模型。广义极值分布 (简称 GEV 分布)，其分布函数为：

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp\left(- (1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & (\xi \neq 0) \\ \exp(-e^{-x}) & (\xi = 0) \end{cases} \quad (1)$$

其中， x 满足 $1+\xi x > 0$ ， ξ 是形状参数。 $\xi > 0$ 对应于 Frechet 分布， $\xi = 0$ 对应于 Weibull 分布， $\xi < 0$ 对应于 Gumbel 分布。如果引进位置参数 μ 和尺度参数 σ ，那么分布函数 $H_{\xi}(X)$

就可以扩展为 $H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = H_{\xi}(\frac{x-\mu}{\sigma})$ 。在风险管理领域, 我们主要感兴趣的是 Frechet 分布, 因为这一类分布是由厚尾的母分布得到的, 拟合金融数据相当好。

极值分布理论主要包括两类模型, 即传统的分块样本极大值模型 BMM (Block Maxima Model) 和近年来发展起来的 POT (Peak Over Threshold) 模型。BMM 模型主要是对组最大值 (Block Maxima) 建模, POT 模型则对观察值中所有超过某一较大门限值 (threshold) 的数据建模。由于 POT 模型有效地使用了有限的极端观察值, 因此通常被认为在实践中是最有用的。设 $F(x)$ 为股价收益率损益分布函数, u 为门限值, $x-u$ 表示超额数, 其分布函数记为:

$$F_u(y) = P(X-u \leq y | X > u), 0 \leq y_0 \leq x_0 - u$$

显然:

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} \tag{2}$$

对超额数分布由 Pickands - Balkama - de Haan 定理知, 对于充分大的阈值 u , 超额数的分布函数可以用广义 Pareto 分布近似。于是对超额数分布函数用广义 Pareto 模型进行拟合。广义 Pareto 分布由 Pickands 在 1975 年首次介绍, 它广泛应用于极值分析、拟合保险损失以及可靠性研究领域。广义 Pareto 分布 (GPD) 的分布函数含有 ξ, β 两个参数:

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi x}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x}{\beta}) & \xi = 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中, ξ 是重要的形状参数, 而 β 是分布的尺度参数, $\beta > 0$ 。当 $\xi \geq 0$ 时, $x \geq 0$; 当 $\xi \leq 0$ 时, $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi}$ 。 $\xi \geq 0$ 时广义 Pareto 分布是厚尾的, 这种情形与风险测量是最相关的。构造 $F(x)$ 的尾部估计表达式: 若 $x > u$, 则由 (2) 式知:

$$F(x) = (1 - F(u)) G_{\xi, \beta}(x - u) + F(u) \tag{4}$$

对 $F(x)$ 的估计需要分以下几步进行:

- (1) 找到适宜的阈值 u ;
- (2) 估计广义 Pareto 分布 $G_{\xi, \beta}(x - u)$ 的参数 ξ, β ;
- (3) 估计 $F(u)$;
- (4) 尾部及分位数的估计。

将所有估计量代入上式, 得到 $F(x)$ 的尾部估计

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{Nu}{n} (1 + \hat{\xi} \frac{x-u}{\hat{\beta}})^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \tag{5}$$

当 $x > u$ 时, 定义 VaR_c 为在 c 的概率水平下的风险价值, 可以得到 VaR_c 的表达式:

$$VaR_c = F^{-1}(c) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} ((\frac{n}{Nu} (1-c))^{-\hat{\xi}} - 1) \tag{6}$$

尽管 VaR 已被广泛接受, 但它存在着不满足次可加性, 并且没有考虑到尾部风险等不足, 为弥补这些缺陷, Artzner 等提出了期望损失模型 ES, ES 模型度量的是损失超过 VaR

水平的条件期望值。其基本定义为：随机变量 X 表示资产组合的损益，在给定时间内和置信水平 $(1-\alpha)$ 下的 VaR 值是 $VaR_\alpha(X)$ ，则 $ES_\alpha(X)$ 表示为：

$$ES_\alpha(X) = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)]$$

$$\hat{ES}_\alpha = \frac{VaR_\alpha(x)}{1-\xi} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1-\xi} \quad (7)$$

大量实证研究表明，我国股市收益率数据普遍具有 GARCH 特征，以上所描述的 POT 模型显然还只是从静态角度考虑极端值的分布与 VaR 的估计，为从动态角度进行风险测度，本文将把随机波动模型结合到上述 POT 模型中，基本思路是：首先对收益率损失数据拟合 GARCH 模型，其次对拟合后的残差运用以上所言的 POT 模型分析残差的 VaR；再次是利用损失数据与残差数据 VaR 的关系获得损失的 VaR；最后对获得的 VaR 估计值进行动态检验。

二、应用极值分布度量 VaR 的实证分析

本文取上证指数的每日收盘价为样本数据，时间长度为 1996 年 12 月 16 日至 2004 年 12 月 31 日共 1940 组数据，1939 个日对数回报。

(1) 数据分析。日收益定义为

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$$

P_t 为股指在时刻 t 时的收盘价，样本数据对数收益率的容量为 1939 组数据，基本的描述统计量见图 1 所示。很显然，这一分布是尖峰、厚尾的，与正态分布相差甚远。在运用极值方法对 VaR 进行估计时，我们对样本数据取负号 ($-r_t$)。于是通过计算得到的上侧分位数再取负号就是所求的风险测量值。

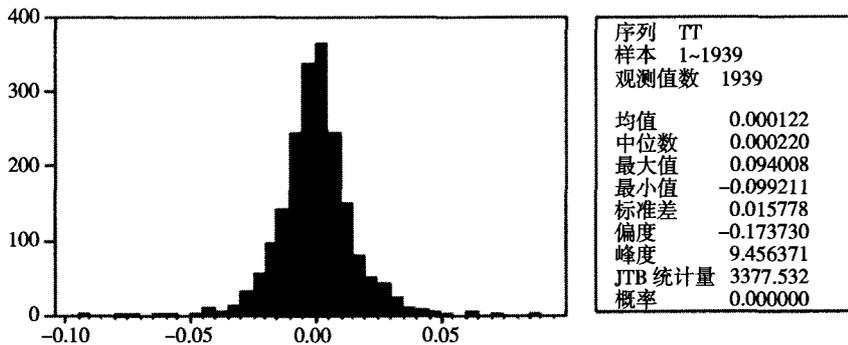


图 1 上证指数基本统计量

(2) 正态性检验。Q-Q 图是用来检验样本分布的一种统计图形技术，它把被检验数据的实际分位数与所指定分布的理论分位数描绘在图形上。如果被检验的数据符合所指定的分布，代表样本数据的点就会落在一条直线上。由图 1 可以明显看出，上证指数对数收益的分布函数在收益和损失两端都具有厚尾特性，JB 统计量=3377.532，拒绝正态分布假设。

(3) 参数的确定。采用 Q-Q 图和 Hill 图来确定阈值。对比图 2 和图 3，我们确定阈值 $u=0.01714$ ，超过 u 的样本的个数为 186。用极大似然估计法来估计参数 $\xi=0.058493272$ ， $\beta=0.01016575$ ，见表 1。利用公式 (6)、(7) 计算在不同置信水平下的 VaR 值和 ES 值，结果见表 2。

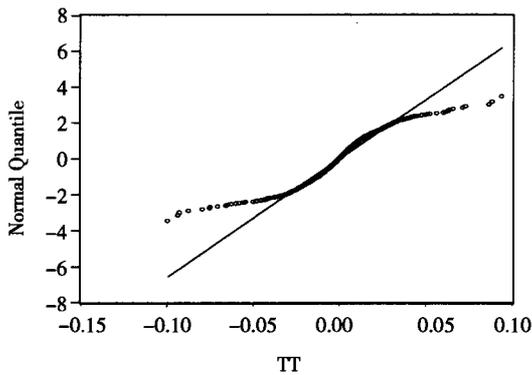


图2 Q-Q图

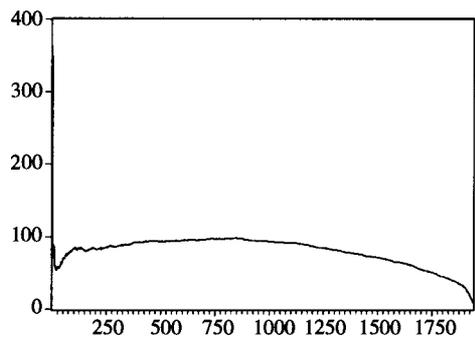


图3 Hill图

表1 参数估计结果

| 参数 | 估计值 | 标准差 | t 统计量 |
|---------|-------------|---------------|-----------|
| β | 0.010165750 | 0.00044503449 | 22.842611 |
| ξ | 0.058493272 | 0.029489790 | 1.9835093 |

表2 VaR 和 ES 结果比较

| 置信水平 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| VaR | 0.0238913 | 0.0313619 | 0.0417138 | 0.0499218 |
| ES | 0.0351081 | 0.0430428 | 0.0540378 | 0.0627558 |
| 历史模拟法 | -0.02309 | -0.02912 | -0.04498 | -0.06447 |

我们发现利用极值理论计算得到的 VaR 值和 ES 值：第一，在不同的置信水平下，ES 值都比相应的 VaR 值大，可以告诉我们若不利情况真的发生，损失会是多少；第二，极值方法与历史模拟计算得到的值进行比较，极值方法在置信水平为 95% 和 97.5% 的情况下高估了风险，而在 99% 和 99.5% 的置信水平下低估了市场风险。这与损失（收益）分布的尖峰、厚尾特性相一致。

(4) 动态风险测度的估计。为更加准确地测度收益率序列的 VaR 和 ES 值，还需将以上的静态方法与收益率序列的动态特征相结合，即动态地测试收益率序列的风险测度值。首先需要考察损失（收益率）序列的动态行为。我们已经知道均值为 0、方差服从 GARCH (1, 1) 时，对金融数据的拟合效果最好，因此假定损失变量服从以下波动率模型：

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \beta + \lambda_1 X_{t-1}^2 + \sigma_1 \sigma_{t-1}^2, \quad \beta > 0, \quad 0 \leq \lambda_1, \quad \sigma_1 < 1 \quad (8)$$

其中， X_t 表示收益率，条件均值 μ_t 和条件异方差 σ_t 在信息集 Ω_{t-1} 上是可测的， Ω_{t-1} 包括 $t-1$ 及其以前各时刻的所有信息， Z_t 是一个严格的白噪声过程，均值是 0，方差为 1，其边际分布为 $F_z(z)$ 。

记 VaR_t^c 和 ES_t^c 分别表示条件 VaR 和条件 ES，则动态风险测度分别表示为：

$$\begin{aligned} VaR_q^t &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_q \\ ES_q^t &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} E [z | z > z_q] \end{aligned} \tag{9}$$

其中, $z_q = \inf \{z \in \mathbb{R} : F_z(z) \geq q\}$ 。

估计这些风险测度时最重要的就是在时间段 $(t, t+1]$ 上对波动 σ_{t+1} 的预测。有两种方法: 一种方法是假设 Z_t 为某一具体的分布 (如正态分布或 t 分布等), 用极大似然估计去拟合一个恰当的时间序列模型; 另一种方法是对 F_z 不假设具体分布, 通过极大似然方法估计时间序列的参数, 并且从模型的残差中了解 F_z (McNeil 等, 2000)。

本文采用后一种方法, 利用极值理论去估计 z_q 。实际上我们可以稍微修改程序, 确定尾部的数 $k, k \leq n$, 这有效地给我们一个随机的第 $(k+1)$ 次序统计量 (即阈值 u)。由模型 (8), 我们构造残差序列 $\{z_t | z_t = \frac{x_t}{\sigma_t}, t=1, 2, \dots, n\}$, 令 $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n$ 表示残差的次序统计量。用数据 $(z_{(1)} - z_{(k+1)}, \dots, z_{(k)} - z_{(k+1)})$ 来拟合广义 Pareto 分布的参数 ξ, β 。 $(z_{(1)} - z_{(k+1)}, \dots, z_{(k)} - z_{(k+1)})$ 是所有超过阈值 u 的超额数。此时, 利用公式 (6)、(7) 来估计 z_q , 经数据分析得到: 阈值 $u=1.5559, k=105$, 参数估计结果见表 3、表 4。从而由模型 (9) 得到动态情况下的 VaR, 见图 (4) 和图 (5)。

表 3 参数估计结果

| 参数 | 估计值 | 标准差 | t 统计量 |
|---------|------------|-------------|-----------|
| β | 0.55615789 | 0.078482332 | 7.0864088 |
| ξ | 0.16054411 | 0.10304650 | 1.5579773 |

表 4 沪市 z_q 和 $E [z | z > z_q]$ 在不同置信水平下结果比较

| 置信水平 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|
| z_q | 1.59965 | 2.01267 | 2.63419 | 3.16899 |
| $E [z z > z_q]$ | 2.27071 | 2.76272 | 3.5031 | 4.14018 |

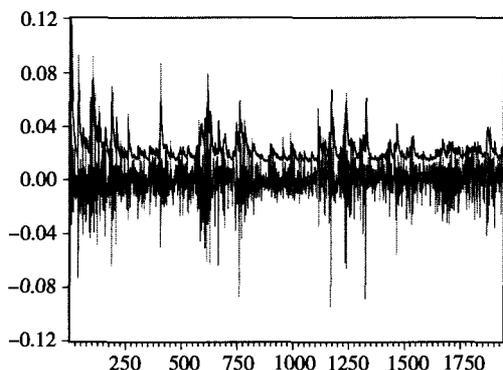


图 4 沪市动态 VaR 图 (0.95 置信水平)

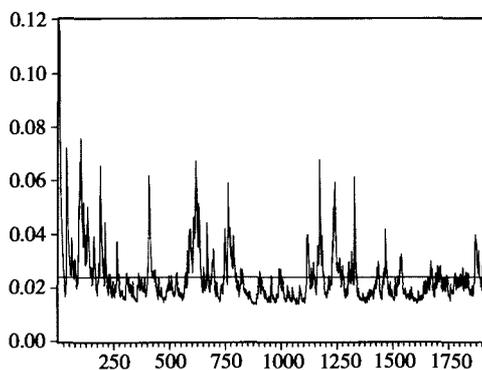


图 5 沪市动、静态 VaR 对比图 (0.95 置信水平)

以上估计结果表明：①相对静态分析而言，动态 VaR 更好地拟合了收益率序列的变动，损失变动剧烈时，VaR 值也随着波动，由图 4 可见，动态 VaR 值与实际损失值的变动吻合得相当好；②无论是从动态还是从静态风险测度的角度来看，极值法 VaR 的拟合效果都比较好，同时动态风险测度相对静态而言能够更灵敏地反映市场价格行为的变化；③选择 GARCH (1, 1) 模型与极值法作为测度我国股市日指数收益率的 VaR 值的基本模型，在实际应用中可以随着数据的更新而不断更新 GARCH 模型的参数与 z_q 值，从而获得对未来风险的一个更好估计。

三、结 论

本文运用极值理论度量市场风险，并用历史模拟法进行后验得出：相对 VaR 来讲，ES 可以更加明确地给出不利情况发生时，损失会是多少。在置信水平高于 99% 之后，都低估了风险。这实际上和人们在遇到诸如亚洲金融危机等极端条件下往往不能很好地预测危机相吻合。无论是高估还是低估了金融风险，都不利于金融机构的风险管理。极值理论度量市场风险的方法和传统度量金融市场风险的方法比较，我们会看到：参数法、历史模拟法以及 Monte Carlo 模拟计算出的 VaR 值是一个基准值，当我们考虑到分布的尾部、要计算最大可能损失时，以上方法就显得力不从心了。而分布的尾部反映的是潜在的灾难性事件导致的金融机构的重大损失，这正是风险管理者和金融机构监管者注重的地方。

本文主旨在于金融收益序列的尾部估计，特别是如 VaR 和 ES 等风险度量。我们通过伪最大似然估计方法用 GARCH 模型对收益数据进行拟合，应用极值理论中的广义 Pareto 分布对新息分布的尾部建模，并将此方法与其他估计金融数据尾部的估计方法相比较，得出结论如下：第一，基于尾部估计产生收益序列的边际分布的无条件方法，能够比较好地度量 VaR 和 ES 值；第二，残差的分布常常是偏峰的，对于分布尾部的建模，我们采用 GPD 近似方法结果会相对更好，因为它可以处理非对称尾部问题，而且这种方法还有坚实的理论基础；第三，我们提倡采用一种具有更优性质的风险度量方法“预期不足”，在我们的模型中，这种方法很容易实现。通过比较我们所得预期不足和具有正态新息 GARCH 的结果表明，新息分布应该用厚尾分布对其建模，最好是用极值理论方法。总之，无论是从动态还是从静态风险测度的角度来看，极值法较其他度量风险的方法为优，同时动态风险测度相对静态而言能够更灵敏地反映市场价格行为的变化，因此选择 GARCH (1, 1) 模型与极值法作为测度我国股市日指数收益率的 VaR 值的基本模型，在实际应用中可以随着数据的更新而不断更新 GARCH 模型的参数与 z_q 值，从而获得对未来风险的一个更好估计。

参 考 文 献

- [1] Longin F M. *The asymptotic distribution of extreme stock market returns* [J]. *Journal of business*, 1996, 69 (3): 383~408.
- [2] Kearns P, Paqan A. *Estimating the density tail index for financial time series* [J]. *The Review of Economics and Statistics*, 1997, 171~175.
- [3] Longin F M. *From value at risk to stress testing: the extreme value Approach* [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2000, 24: 1097~1130.

(下转第 133 页)

- [26] Yoshida and Yamai, *Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk (2)* [J], IMES Discussion Paper Series 2001-E-14.
- [27] Yamai Y. and Yoshida T., On the Validity of Value-at-Risk; Comparative Analyses with Expected Shortfall [J], *Monetary and Economic Studies*, 2002, 1: 57~86.
- [28] 高全胜:《金融风险计量理论前沿与应用》[J],《国际金融研究》2004年第9期。
- [29] 何光辉、杨咸月:《现行金融风险测度方法的局限及其突破》[J],《上海金融》2004年第4期。
- [30] 曲圣宁、田新时:《投资组合风险管理中 VaR 模型的缺陷以及 CVaR 模型研究》[J],《统计与决策》2005年第10期。
- [31] 史树中:《金融经济学十讲》[M],上海人民出版社,2004。
- [32] 唐爱国:《广义随机占优理论》[M],北京大学出版社,2005。
- [33] 唐爱国、秦宛顺:《广义随机占优单调一致风险测度和 ES (n)》[J],《金融研究》2003年第4期。
- [34] 郑文通:《金融风险管理的 VaR 方法及其应用》[J],《国际金融研究》1997年第9期。

(责任编辑:陈卫宾)

(上接第 124 页)

- [4] Ho L C, Burridge P, Caddle J. *Value at Risk: applying the extreme value approach to Asian markets in the recent financial turmoil* [J]. *Pacific Basin Finance Journal*, 2000, 8, 249~275.
- [5] Artzner P, Delbaen. F, et al. *Thinking coherently* [J]. *Risk*, 1997, 10 (11): 68~71.
- [6] Artzner P, Delbaen. F, et al. *Coherent measures of risk* [J]. *Math Finance*, 1999, 9 (3): 203~228.
- [7] 朱国庆、张维等:《极值理论应用研究进展评析》[J],《系统工程学报》2001年第1期。
- [8] 周开国、缪柏其:《应用极值理论计算在险价值 (VaR) ——对恒生指数的实证分析》[J],《预测》2002年第3期。
- [9] 陈学华、杨耀辉:《股市风险 VaR 与 ES 的动态度量与分析》[J],《系统工程》2004年第1期。
- [10] Hosking J R M, Wallis J R, *Parameter and quantile estimation for the generalized Pare to distribution* [J]. *Technometrics*, 1987, 29: 339~2349.
- [11] 封建强:《沪深股市收益率风险的极值 VaR 测度研究》[J],《统计研究》2002年第4期。
- [12] 王春峰:《VaR-金融市场风险管理》[M],天津大学出版社,2001。
- [13] Alexander J. McNeil a, Rudiger Frey. *Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach* [J]. *Journal of Empirical Finance*, 2000, 6, 271~300.
- [14] Fisher R A. Tippet L H C, *Limiting forms of the frequency distributions of the largest of smallest member of a sample* [J], *Proc, Camb, Phil, Soc*, 1928, 24: 180~190.
- [15] Gumbel E J. *Statistics of extremes* [M]. New York: Columbia University Press, 1958.

(责任编辑:彭战)