

# Copula - MGARCH 模型及其估计方法在汇率市场中的应用<sup>①</sup>

刘金全 隋建利 王雄威

(吉林大学数量经济研究中心)

**【摘要】** 两步优化估计方法 IFM 是 Copula - GARCH 模型的重要参数估计方法,但是当研究的样本容量较小时,IFM 估计方法会产生较大的估计误差。为了更为准确地估计汇率市场波动,我们运用多步优化估计方法 MBP 来估计汇率市场中的 Copula - MGARCH 模型,检验结果表明 MBP 方法比精确极大似然估计方法更简单、比 IFM 方法更有效,所获得的汇率波动估计精度更高。

**关键词** Copula MGARCH MBP 估计方法

**中图分类号** F224.0 **文献标识码** A

## Copula - MGARCH Models and Efficient Estimation in Exchange Rate Markets

**Abstract:** A two - step optimization method called inference functions for margins (IFM) is broadly adopted to estimate Copula - GARCH models. However, IFM is subject to small - sample bias. This paper proposes to estimate Copula - GARCH models in exchange rate markets by applying Maximization by Parts (MBP), a multi - step optimization algorithm. This method decomposes the complicated log likelihood into two parts. In the decomposition, the first part is an easy likelihood consisting of only marginal likelihood. The second part includes dependence parameters from a multivariate likelihood and is used to update the estimates from the first part. The results indicate that MBP can provide more efficient estimation than IFM.

**Key words:** Copula; Multivariate GARCH; Maximization by Parts

① 本文获吉林大学“211工程”和“985工程”建设项目;国家自然科学基金项目“非线性随机波动模型估计方法及应用研究”(70971055);教育部人文社会科学重点研究基地重大项目“全国经济周期波动态势与宏观经济总量内在关联机制的动态计量研究”(08JJD790133);教育部人文社会科学研究应急项目“金融危机中的经济形态关联性与市场反应机制研究”(2009JYJR014);吉林大学“985工程”研究生创新基金重点项目“经济与金融时间序列非线性和非对称性的计量与应用研究”资助。

## 引 言

金融时间序列数据所具有的波动聚类现象广泛存在于金融资产市场当中,并在诸如投资组合选择、期权定价、套期保值以及风险管理等方面具有举足轻重的作用。广义自回归条件异方差(GARCH)模型,被广泛应用于描述、预测金融时间序列数据中波动性的变化特征,经GARCH模型均值调整后的金融资产收益序列时变相依且连续不相关。多变量GARCH(MGARCH)模型将单变量波动模型扩展为多变量的情形,进而来模拟投资组合的收益情况, MGARCH模型可以用来研究不同金融资产市场中波动性与协波动性之间的相互关系问题。

鉴于计算方便,收益率序列服从线性正态分布或线性对数正态分布的思想在大多数基于MGARCH模型的研究领域中一直占据主导地位。然而,一些经验研究却表明,协方差平稳的对数收益率序列大多都表现出时变波动性、长期相关性、尖峰、厚尾及有偏等特征,这些特征意味着金融时间序列中很可能存在非线性动态模式(Taylor, 1986),其与正态分布偏离的研究是金融衍生工具定价、风险管理以及其他研究领域的前沿问题。在高阶MGARCH模型中,金融时间序列服从非正态分布的假设将会使所研究的问题更为棘手。由于Copula理论不需要考虑联合分布的假设前提,从而能够在模拟时间序列联合分布时得到很好的应用。Copula函数的主要优点在于可以将任意 $n$ 维联合分布分解为 $n$ 个一元边缘分布和一个Copula函数,因此,可以通过选择恰当的边缘分布和一个Copula函数来构造一个多变量联合分布。在现代计量经济学模型中,存在许多单变量分布集,而多变量的分布集却非常有限,利用Copula函数和边缘分布函数,就可以构造一些比现有多变量分布更利于度量的多变量分布模式。我国学者张尧庭(2002a, 2002b)从理论上探讨了Copula技术在金融领域应用的可行性;张明恒(2004)研究了多资产VaR(Value-at-Risk)的Copula计算方法;韦艳华等(2003)对Copula技术在金融领域中的应用作了概述,而对于Copula技术在应用层面的研究有待于进一步地深入探讨。

Copula-GARCH模型中的参数可以通过精确极大似然(Exact Maximum Likelihood, EML)方法估计得到,但是,在对模型进行估计时,由于协方差矩阵中存在的未知系数不断增加,因此无法对所有参数进行准确估计。对于 $k$ -维收益率序列而言,如果利用Gaussian Copula函数进行研究,则存在 $k$ 个相关系数需要估计。在许多更复杂的情形中,EML估计方法的运用将变得步履维艰,近年来,有学者通过运用IFM(Inference Function for Margins)方法对参数进行估计。IFM估计方法包括以下两个步骤(两步骤中均采用EML估计方法):①估计单变量边缘分布函数的参数;②基于第一步所得结果,估计条件Copula函数中的参数。由于将一个“复杂的”最优化问题分解为多个“简单的”最优化问题,因此从计算角度讲IFM方法较EML方法更简便。但是,如果待估函数偏离于实际函数,那么运用IFM方法将会导致估计效率的损失。本文发现,运用EML方法得到的Copula-MGARCH模型参数估计值与运用IFM方法得到的Copula-MGARCH模型参数估计值之间存在显著差异,因此,运用更为有效的估计方法对Copula-MGARCH模型参数进行估计势在必行。

由于MGARCH模型中的似然函数方程非常复杂,尤其二阶导数难以求得。本文运用Song、Fan(2005)等提出的MBP(Maximization by Parts)方法估计Copula-MGARCH模型,MBP方法不需求出完整似然函数的二阶导数,而是将似然函数分解并最终得到最优

解,具体方法是选择完整似然函数中容易求得二阶导数的部分并计算其二阶导数,剩余复杂部分的似然函数不要求二阶导数仍然可以将其最优化。本文在估计 Copula - MGARCH 模型时,将模型中的完整似然函数分为两部分,一部分包括似然函数中独立相关条件下的边缘分布函数;另一部分包括边缘分布函数和 Copula 函数的似然函数。

## 一、运用 MBP 方法估计 Copula - MGARCH 模型

### 1. MBP 方法简介

在现有相关文献中,大都利用一步修正的极大似然估计 (Maximum Likelihood Estimate, MLE) 方法对所研究的多变量模型进行估计,例如,由 Xu (1996) 提出的通过两阶段对模型参数进行估计的 IFM 方法得到了广泛应用。在计算方面,IFM 方法比 EML 方法更容易,但是,当所研究的样本容量较小时,IFM 估计方法会产生较大的估计偏差。本文运用 Song、Fan 等 (2005) 提出的 MBP 方法估计 Copula - MGARCH 模型,具体而言,可以将似然函数分为两部分,第一部分是一个简单的对数似然函数,第二部分是在第一部分所得结果的基础上进行估计,考虑如下对数似然函数:

$$l(\theta) = l_w(\theta) + l_e(\theta) \quad (1)$$

其目的是为了得到  $l(\theta)$  的极大似然估计量,令似然函数  $i(\theta)$  为零,即:

$$i(\theta) = i_w(\theta) + i_e(\theta) = 0 \quad (2)$$

考虑第一部分  $i_w(\theta)$ ,需要解方程  $i_w(\theta) = 0$ ,其中,假设  $i_w(\theta)$  为无偏估计量,运算过程如下:

Step 1: 解方程  $i_w(\theta) = 0$ ,从而得到  $\theta_n^1$ ;

⋮

Step k: 解方程  $i_w(\theta) + i_e(\theta_n^{k-1}) = 0$  从而估计  $\theta_n^k$ ,  $k=2, 3, \dots$

因为仅是对完整对数似然函数中的一部分进行了估计,所以服从渐进正态分布的估计量  $\theta_n^k$  有效性较低,而在 Step k 中利用包含  $i_e$  的方程可以得到更有效的参数估计。此外,当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\theta_n^k$  的极限值  $\theta_n^\infty$  满足方程  $i_w(\theta_n^\infty) + i_e(\theta_n^\infty) = 0$ ,所以 MBP 估计量最终会收敛于 EML 估计量。

### 2. Copula - MGARCH 模型描述

Patton (2000) 以及 Jondeau 和 Rockinger (2001) 在传统 GARCH 模型的基础上,引入单一条件方差、时间序列的边缘分布函数以及一个连接边缘分布的条件 Copula 函数从而构成 Copula - MGARCH 模型。Copula - MGARCH 模型与传统 MGARCH 模型相比具有很多优点。首先,由于 Copula - MGARCH 模型能够分别识别单一条件方差和条件相关矩阵或联合条件密度的 Copula 函数,因此, Copula - MGARCH 模型中的待估参数比 MGARCH 模型中的待估参数少得多。其次,在关于 MGARCH 模型的文献中,通常假设金融收益率序列服从一个特定的多元椭圆分布 (例如,多元正态分布或多元 Student - t 分布),然而,多元椭圆分布虽然形式简单、计算方便,但却不能准确体现金融时间序列数据所具有的“尖峰厚尾”及非对称等特性,而利用 Copula - MGARCH 模型可以研究由不同的边缘分布和 Copula 函数所构成的更为灵活多样的联合分布函数。

Lee 和 Long (2005) 通过研究认为 Copula - MGARCH 模型无论在已知样本的模型选择

标准方面还是在未知样本的多变量密度预测方面都优于 MGARCH 模型。Palaro 和 Hotta (2006) 运用条件 Copula - MGARCH 模型估计美国股票市场的 VaR (Value - at - Risk) 发现, 由 Copula - MGARCH 模型得到的结果比由传统 MGARCH 模型得到的结果更稳健。在构造 Copula - MGARCH 模型以前, 本文首先对 Copula 函数做一基本介绍。

根据 Nelsen (1998) 的定义,  $N$  元 Copula 函数是指具有以下性质的函数  $C$ :

$$(1) C = I^N = [0, 1]^N;$$

(2)  $C$  对于其所包含的每一个变量都是递增的;

(3)  $C$  的边缘分布  $C_n(\cdot)$  满足:  $C_n(u_n) = C(1, \dots, 1, u_n, 1, \dots, 1) = u_n$ , 其中,  $u \in [0, 1], n \in [1, N]$ 。

显然, 若  $F_1(\cdot), \dots, F_N(\cdot)$  是一元分布函数, 令  $u_n = F_n(x_n)$  为一随机变量, 则  $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N))$  是一个具有边缘分布函数  $F_1(\cdot), \dots, F_N(\cdot)$  的多元分布函数。Copula - MGARCH 模型源于 Sklar (1959) 定理, 即任何联合分布函数都可以分解为多个边缘分布和一个 Copula 函数。该定理说明, 如果  $F$  为具有边缘分布函数  $F_1(\cdot), \dots, F_N(\cdot)$  的联合分布函数, 那么存在一个 Copula 函数  $C$ , 满足:

$$F(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N)) \quad (3)$$

若  $F_1(\cdot), \dots, F_N(\cdot)$  连续, 则  $C$  唯一确定; 反之, 若  $F_1(\cdot), \dots, F_N(\cdot)$  为一元分布函数, 那么由式 (1) 定义的函数  $F$  是边缘分布函数  $F_1(\cdot), \dots, F_N(\cdot)$  的联合分布函数。通过 Copula 函数  $C$  的密度函数  $c$  和边缘分布函数  $F_1(\cdot), \dots, F_N(\cdot)$ , 可以方便地求出  $N$  元分布函数  $F(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N)$  的密度函数:

$$f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N)) \prod_{n=1}^N f_n(x_n) \quad (4)$$

其中,  $c(u_1, \dots, u_n, \dots, u_N) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_n, \dots, u_N)}{\partial u_1 \dots \partial u_n, \dots, \partial u_N}$ ,  $f_n(\cdot)$  是边缘分布函数  $F_n(\cdot)$  的密度函数。

由此可见, Copula 函数为求得联合分布函数提供了一条便捷的通道。此外, Sklar 定理的重要性还在于, 为我们提供了一条在不研究边缘分布函数的情况下分析多元分布相依结构的途径。基于 Copula 理论, 本文运用 Copula 函数模拟包含协方差矩阵的多元非椭圆分布金融收益率序列, Copula - MGARCH 模型可以表示为:

$$r_t = \mu_t(\theta) + \varepsilon_t \quad (5)$$

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2}(\theta) z_t \quad (6)$$

$$z_t | F_{t-1} \sim C(u_{1t}, \dots, u_{Nt}; \alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad (7)$$

$$E(z_t | F_{t-1}) = 0 \quad (8)$$

$$E(z_t z_t' | F_{t-1}) = \sum_t = (\sigma_{ij,t}), \quad \sigma_{ij,t} = 1 \quad (9)$$

其中,  $\{r_t\}_{t=1}^T$  代表  $N$  个收益率序列向量,  $\theta$  为参数向量,  $\mu_t(\theta)$  是条件均值向量,  $H_t(\theta)$  是  $r_t$  的  $N \times N$  维条件方差矩阵,  $z_t$  是扰动向量,  $u_i = F_i(z_{it})$  是边缘分布函数,  $C(\cdot, \cdot)$  是条件 Copula 函数。可以看出, 传统的 MGARCH 模型是当  $C(u_{1t}, \dots, u_{Nt}) =$

$u_{1t}u_{2t}\cdots u_{Nt}$  且  $\sigma_{ij,t}=0$  时 Copula - MGARCH 模型的特殊情况。

### 3. 双变量 GaussianCopula 函数

考虑具有双变量 GaussianCopula 函数的数据集  $(y_1, y_2)$ , 变量  $Y_i = (y_{i1}, y_{i2})$  的分布函数为  $C(F_1(y_1; \alpha_1), F_2(y_2; \alpha_2) | \Gamma)$ ; 其中,  $F_1(y_1; \alpha_1)$  和  $F_2(y_2; \alpha_2)$  是边缘累积分布函数 (CDF),  $\alpha$  为变量  $Y_i$  的边缘分布函数的参数向量,  $C(\cdot)$  是双变量 GaussianCopula 函数:

$$C(u_1, u_2 | \Gamma) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)), (u_1, u_2) \in (0, 1) \quad (10)$$

其中,  $\Phi_2$  是标准多元正态累积分布函数 (CDF);  $\Phi^{-1}$  是标准一元正态累积分布函数 (CDF) 的反函数;  $u_i = F_i(y_i; \alpha_i)$ ,  $i=1, 2$  是随机变量。假定  $f_1(y_1; \alpha_1)$  和  $f_2(y_2; \alpha_2)$  是边缘密度函数, 同时, 令  $\theta$  代表模型中的所有参数  $\alpha_1, \alpha_2$  和  $\Gamma$ , 则似然函数可以写为:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \{c(u_1, u_2 | \Gamma) f_1(y_1, \alpha_1) f_2(y_2, \alpha_2)\} \quad (11)$$

其中,  $c(\cdot)$  是双变量 GaussianCopula 函数  $C(\cdot)$  的密度函数, 即:

$$c(u_1, u_2 | \Gamma) = |\Gamma|^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2} Z^T (I_d - \Gamma^{-1}) Z\right\} \quad (12)$$

其中,  $Z^T = (z_1, z_2) = (\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$ ,  $I_d$  为  $2 \times 2$  的密度函数矩阵,  $\Gamma$  是相关系数矩阵。将似然函数 (11) 取对数得:

$$l(\theta) = l_\omega(\theta_1) + l_e(\theta_1, \theta_2) \quad (13)$$

$$l_\omega(\theta_1) = \sum_{i=1}^n \ln f_1(y_{i1}; \alpha_1) + \sum_{i=1}^n \ln f_2(y_{i2}; \alpha_2) \quad (14)$$

$$l_e(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{2} \ln |\Gamma(\theta_2)| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Z_i(\theta_1)^T (I_d - \Gamma(\theta_2)^{-1}) Z_i(\theta_1) \quad (15)$$

其中,  $\theta_1 = (\alpha_1^T, \alpha_2^T)^T$ ,  $\theta_2 = \rho$  (相关系数矩阵  $\Gamma$  中的参数);  $l_\omega(\theta_1)$  是在独立相关条件下只包含边缘分布参数  $\theta_1$  时的似然函数;  $l_e(\theta_1, \theta_2)$  包含  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。考虑双变量 Copula 函数有:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, I_d - \Gamma^{-1} = -\frac{\rho}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ -1 & \rho \end{pmatrix}$$

因此,

$$\begin{aligned} Z(\theta_1)^T (I_d - \Gamma^{-1}) Z(\theta_1) &= -\frac{\rho}{1-\rho^2} (z_1^T \quad z_2^T) \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ -1 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\rho}{1-\rho^2} [\rho(z_1^2 + z_2^2) - 2z_1 z_2] \end{aligned} \quad (16)$$

方程 (15) 可以写为:

$$l_e(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{2} \ln(1-\rho^2) - \frac{\rho}{2(1-\rho^2)} \{\rho A(\theta_1) - 2B(\theta_1)\} \quad (17)$$

$$A(\theta_1) = \sum_{i=1}^n [z_{i1}(\alpha_1)^2 + z_{i2}(\alpha_2)^2] \quad (18)$$

$$B(\theta_1) = \sum_{i=1}^n [z_{i1}(\alpha_1) z_{i2}(\alpha_2)] \tag{19}$$

其中,  $z_{ij}(\alpha_j) = \Phi^{-1}(F_j(y_{ij}; \alpha_j))$ 。在此, 依然遵循上文介绍的 MBP 运算方法:

解方程  $\partial l_\omega(\theta_1) / \partial \theta_1 = 0$  得到  $l_\omega(\theta_1)$ , 通过最大化  $l_\omega(\theta_1)$  得到估计量  $\theta_{1,n}$ ; 基于上步得到的  $\theta_{1,n}$ , 解方程  $\partial l_e(\theta_{1,n}, \theta_2) / \partial \theta_2 = 0$ , 可得估计量  $\theta_{2,n}$ ; 基于上步得到的  $(\theta_{1,n}^{-1}, \theta_{2,n}^{-1})$ , 解方程  $\partial l_\omega(\theta_1) / \partial \theta_1 + \partial l_e(\theta_{1,n}^{-1}, \theta_{2,n}^{-1}) / \partial \theta_1 = 0$ , 可得估计量  $\theta_{1,n}^*$ ; 通过解方程  $\partial l_e(\theta_{1,n}^*, \theta_2) / \partial \theta_2 = 0$ , 可得估计量  $\theta_{2,n}^*$ ,  $k=2, 3, \dots$ 。

重复上述步骤,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的估计量能够逐渐收敛于 EML 估计量, 注意到, IFM 方法仅包含了 MBP 方法的 Step1.1 和 Step1.2, 因此是 MBP 方法的特例。本文运用 MBP 方法对具有正态边缘分布的双变量 GaussianCopula - MGARCH 模型参数进行估计。

#### 4. Copula - MGARCH 模型的估计

通过上面的讨论可知, MBP 估计方法要求计算  $\partial l_\omega(\theta_1) / \partial \theta_1$ 、 $\partial l_e(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_1$  以及  $\partial l_e(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_2$ 。可以将一元 GARCH (1, 1) 模型表示为:

$$y_t = \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, h_t) \tag{20}$$

$$h_t = \omega + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma h_{t-1} \tag{21}$$

令  $q_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, h_{t-1})$ ,  $\alpha = (\omega, \beta, \gamma)$ , 条件对数似然函数可以写为:

$$l_t(\alpha) = \ln f_t = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(h_t) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \tag{22}$$

在此, 将一个无条件方差的估计值视为条件方差序列的初值:

$$h_0 = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T \varepsilon_s^2 \tag{23}$$

(1) 计算  $\partial l_\omega(\theta_1) / \partial \theta_1$ 。

将方程 (14) 关于  $\theta_1$  求一阶偏导数可得:

$$\partial l_\omega(\theta_1) / \partial \theta_1 = \sum_{i=1}^n l'_{i1} + \sum_{i=1}^n l'_{i2} \tag{24}$$

其中,  $l'_{i1}$  和  $l'_{i2}$  是方程 (22) 的边缘条件对数似然函数, 显然, 通过偏导数  $l'_{i1}$  和  $l'_{i2}$  可以得到  $\partial l_\omega(\theta_1) / \partial \theta_1$ 。在此,  $\theta_1$  为 GARCH 模型参数向量  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  的集合,  $\theta_2 = \rho$  是 GaussianCopula 函数的相关系数。通过方程 (22) 可以得到对数似然函数关于  $\alpha$  的一阶偏导数:

$$l'_t = \frac{\partial l_t(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} = \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} \frac{1}{2h_t} \left( \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \tag{25}$$

方程 (25) 中包含的  $\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}$ , 可以通过方程 (21) 得到:

$$\frac{\partial h_t}{\partial \alpha} = \left( \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \quad \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \quad \frac{\partial h_t}{\partial \gamma} \right)' \tag{26}$$

其中

$$\frac{\partial h_t}{\partial \omega} = 1 + \gamma \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \omega}; \quad \frac{\partial h_t}{\partial \beta} = \epsilon_{t-1}^2 + \gamma \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial h_t}{\partial \gamma} = h_{t-1} + \gamma \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \gamma} \quad (27)$$

方程 (23) 表明  $h_0$  为一常数, 因此, 初值  $\frac{\partial h_0}{\partial \alpha} = 0$ , 由方程 (27) 可得  $\partial h_t / \partial \alpha$ , 将  $\partial h_t / \partial \alpha$  代入方程 (25) 可得  $l'_t$ , 由  $l'_t$  及方程 (24) 可得  $\partial l_w(\theta) / \partial \theta_1$ 。

(2) 计算  $\partial l_e(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_1$ 。

由方程 (17) 可以得到  $l_e(\theta_1, \theta_2)$  关于  $\theta_1$  的偏导数:

$$\frac{\partial l_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = -\frac{\rho}{2(1-\rho^2)} \left\{ \rho \frac{\partial A(\theta_1)}{\partial \theta_1} - 2 \frac{\partial B(\theta_1)}{\partial \theta_1} \right\} \quad (28)$$

通过方程 (18)、(19) 可以分别将  $\frac{\partial A(\theta_1)}{\partial \theta_1}$  和  $\frac{\partial B(\theta_1)}{\partial \theta_1}$  表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(\theta_1)}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^n [z_{i1}(\alpha_1)^2 + z_{i2}(\alpha_2)^2]}{\partial (\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n z_{i1}(\alpha_1)^2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sum_{i=1}^n z_{i2}(\alpha_2)^2}{\partial \alpha_2} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n z_{i1}(\alpha_1) \frac{\partial z_{i1}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + 2 \sum_{i=1}^n z_{i2}(\alpha_2) \frac{\partial z_{i2}(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\partial B(\theta_1)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n [z_{i1}(\alpha_1) z_{i2}(\alpha_2)]}{\partial (\alpha_1, \alpha_2)} = \sum_{i=1}^n z_{i1}(\alpha_1) \frac{\partial z_{i2}(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} + \sum_{i=1}^n z_{i2}(\alpha_2) \frac{\partial z_{i1}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \quad (30)$$

其中,  $\alpha_1 = (\omega_1 \ \beta_1 \ \gamma_1)$ ,  $\alpha_2 = (\omega_2 \ \beta_2 \ \gamma_2)$ 。

由于边缘分布函数和 Copula 函数均服从 Gaussian 分布, 且  $z_{ij} = \epsilon_{ij} h_{ij}^{-1/2}$ , 因此:

$$\frac{\partial z_{ij}(\alpha_j)}{\partial \alpha_j} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ij} h_{ij}^{-3/2} \frac{\partial h_{ij}}{\partial \alpha_j} \quad (31)$$

其中, 向量  $\frac{\partial h_{ij}}{\partial \alpha_j}$  可以通过方程 (26)、(27) 求得, 将  $\frac{\partial h_{ij}}{\partial \alpha_j}$  代入方程 (28)、(29) 和 (30) 可得  $\partial l_e(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_1$ 。

(3) 计算  $\partial l_e(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_2$ 。

由方程 (17) 可以得到  $l_e(\theta_1, \theta_2)$  关于  $\theta_2$  的偏导数:

$$\frac{\partial l_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = \frac{\partial l_e}{\partial \rho} = \frac{np}{1-\rho^2} - \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \{ \rho A(\theta_1) - (1+\rho^2) B(\theta_1) \} \quad (32)$$

通过  $\partial l_w(\theta_1) / \partial \theta_1$ 、 $\partial l_e(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_1$  和  $\partial l_e(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_2$  可以运用 MBP 方法对模型进行估计。

## 二、MBP 方法与 IFM 方法的有效性比较

本文利用 MonteCarlo 模拟方法检验 MBP 方法收敛到 EML 方法的速度。MBP 方法的初值由 IFM 方法的参数估计得到。考虑一个双变量 GaussianCopula - MGARCH (1, 1) 模型的数据生成过程 (DGP):

$$y_{1,t} = \varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{1,t} \sim N(0, h_{1,t}) \tag{33}$$

$$h_{1,t} = \omega_1 + \beta_1 \varepsilon_{1,t-1}^2 + \gamma_1 h_{1,t-1} \tag{34}$$

$$y_{2,t} = \varepsilon_{2,t}, \varepsilon_{2,t} \sim N(0, h_{2,t}) \tag{35}$$

$$h_{2,t} = \omega_2 + \beta_2 \varepsilon_{2,t-1}^2 + \gamma_2 h_{2,t-1} \tag{36}$$

其中，扰动项  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  服从双变量 GaussianCopula 函数  $C(u_1, u_2; \rho)$ ,  $u_i = F_i(\varepsilon_i; \alpha_i)$ ,  $i=1, 2$  是边缘 Gaussian 累积分布函数 (CDF) 的随机变量。

在 MonteCarlo 模拟检验中，假设  $\omega_1 = 0.1, \beta_1 = 0.1, \gamma_1 = 0.8; \omega_2 = 0.1, \beta_2 = 0.1, \gamma_2 = 0.8; \rho = 0.5$ ，样本数  $n=30$  和  $n=100$  时的收敛情况分别在图 1 和图 2 中显示，其中将 MBP 方法的迭代次数  $k$  设为 10。图 1 显示了当样本数  $n=30$  时 MBP ( $k=10$ ) 参数估计值与 EML 参数估计值的平均距离。其中， $\omega_1, \beta_1$  和  $\gamma_1$  三图分别代表第一个序列中 Copula-MGARCH 模型参数的估计结果， $\omega_2, \beta_2$  和  $\gamma_2$  三图分别代表第二个序列中 Copula-MGARCH 模型参数的估计结果，最后的相关系数  $\rho$  图代表 Copula 函数的参数估计结果。从图 1 中可以看出，对于所有 7 个参数而言，尽管 MBP ( $k=10$ ) 估计方法收敛到 EML 估计结果的速度非常缓慢，但是仍然比 IFM ( $k=1$ ) 估计方法更有效。

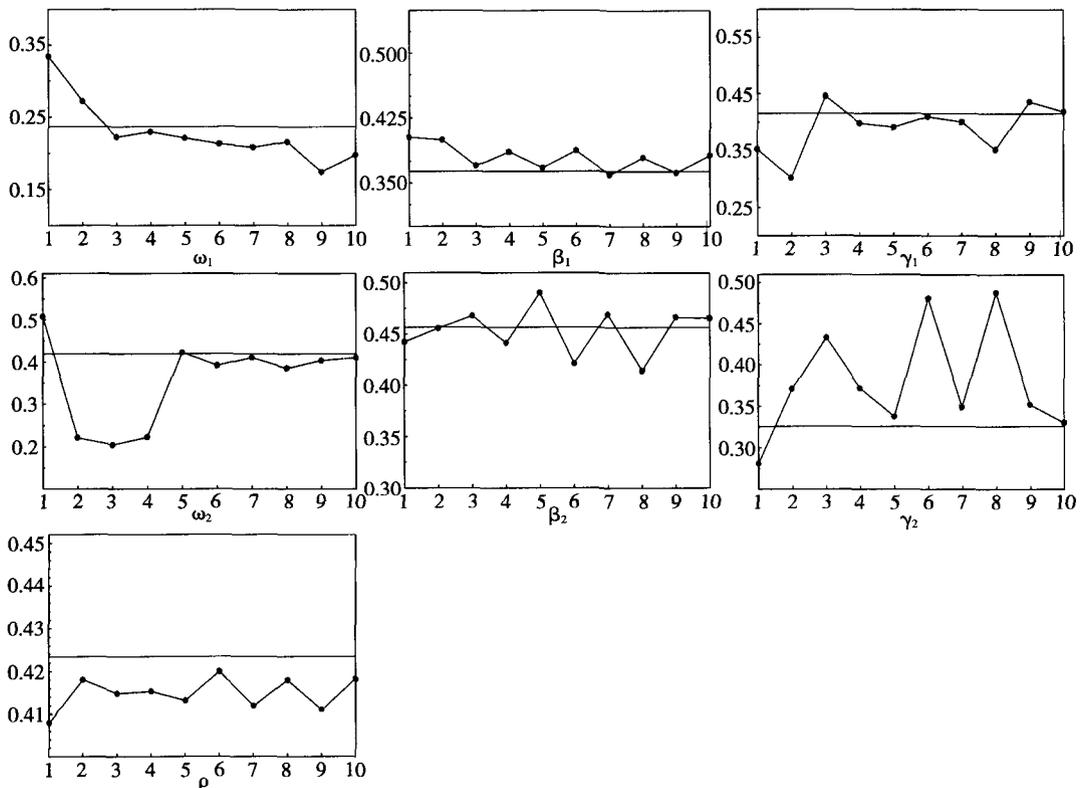


图 1 MBP 估计方法的收敛速度 ( $n=30$ )

在其他假设条件不变的情况下，样本数量  $n$  增加到 100 时的模拟收敛结果如图 2 所示，可以看到，MBP ( $k=10$ ) 方法在经过 4 至 5 次迭代后收敛于 EML 估计结果，这说明 MBP ( $k=10$ ) 估计方法的收敛速度完全取决于样本数量，同时注意到，对于所有的 7 个参数而

言,在经过几次迭代后,MBP ( $k=10$ ) 估计方法要明显优于 IFM ( $k=1$ ) 估计方法。

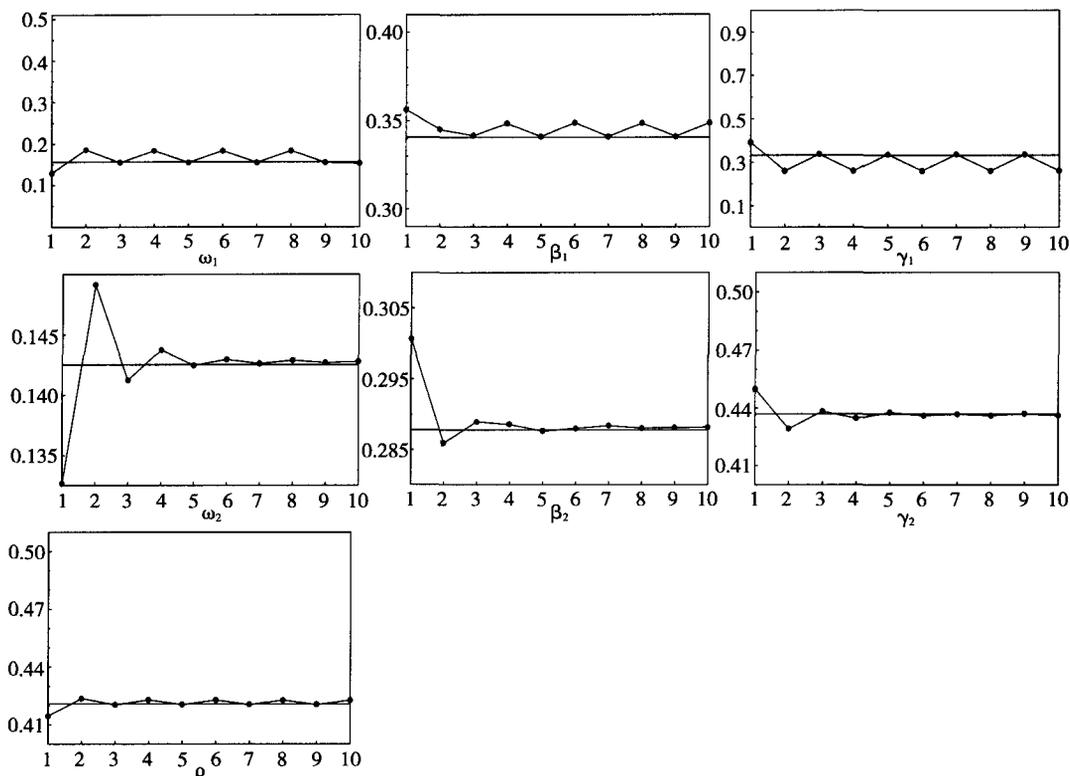


图2 MBP估计方法的收敛速度 ( $n=100$ )

通过 Copula - MGARCH 模型的参数估计结果,我们发现,MBP 估计方法随着迭代次数  $k$  的增加具有逐渐收敛于 EML 估计结果的趋势,同时我们发现,随着样本数量  $n$  的增加,MBP 估计方法更易于快速收敛于 EML 估计结果。此外,参数估计结果表明,MBP 估计方法要明显优于一步迭代的 IFM 估计方法。

### 三、实证检验及所得结论

本文运用上述模型与参数估计方法,对以港币作为中间价计算的人民币现汇买入价 (CNY)、欧元现汇买入价 (EUR)、以及以人民币作为中间价计算的英镑现汇买入价 (GBP)、欧元现汇买入价 (EUR) 数据进行分析。考虑到自 2005 年 7 月 21 日起,我国开始实行以市场供求为基础、参考一篮子货币进行调节、有管理的浮动汇率制度,人民币汇率不再盯住单一美元,形成更富弹性的人民币汇率机制的状况,本文所研究的样本区间为 2005 年 7 月 21 日至 2009 年 5 月 31 日,排除周末及公共假期后,选择对应日期相同的数据,此外,可以计算现汇买入价的对数收益率序列  $R_t = 100 [\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})]$ ,本文以  $R_{CNY}$  代表人民币现汇买入价对数收益率序列、以  $R_{EUR}$  代表欧元现汇买入价对数收益率序列、以  $R_{GBP}$  代表英镑现汇买入价对数收益率序列。数据来源于锐思 (RESSET) 金融研究数据库以及中国银行数据库 <http://www.boc.cn>,文中所涉及的所有程序由 R、Gauss9.0 及 Ox 语言完成。

图3~图4、图5~图6以及图7~图8分别描绘了CNY、EUR以及GBP序列及其对数收益率序列的时间动态轨迹。如图所示,随着时间的推移CNY与EUR两序列总体呈现上升趋势,而GBP序列却在上升的同时出现了一次陡然上升和一次骤然下降。就现汇买入价序列的波动情况而言,随着时间的变化CNY序列具有极其微弱的波动特性,而EUR与GBP两序列总体上呈现出相类似、较大的波动频率。此外,从近期的发展变化来看,CNY与EUR两序列均呈现出强烈地攀升势头,而GBP序列则呈现出一定程度的下降态势。就对数收益率而言,三序列都具有显著的波动聚类特征,这意味着在一段时间内较大的收益率变化伴随着较大的价格变化,较小的收益率改变伴随着较小的价格改变。

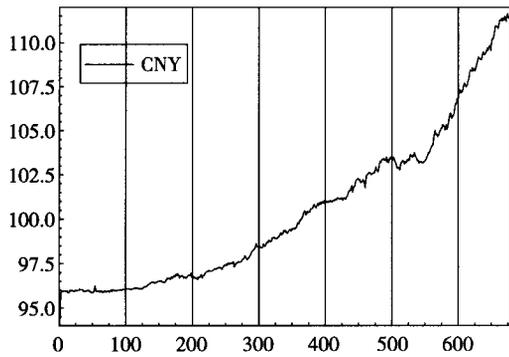


图3 CNY序列图

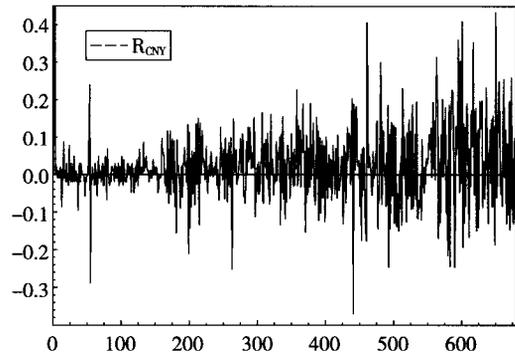


图4 R\_CNY序列

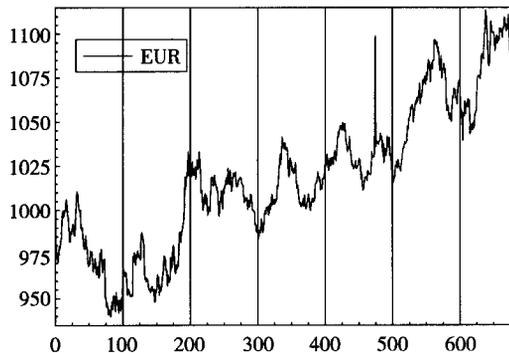


图5 EUR序列图

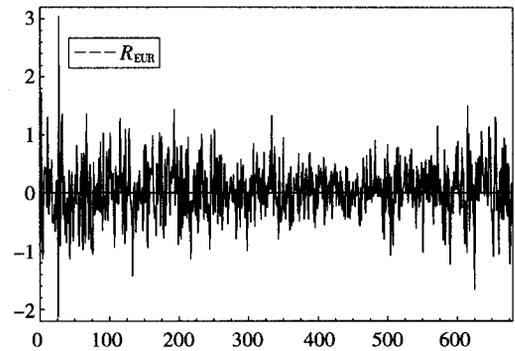


图6 R\_EUR序列

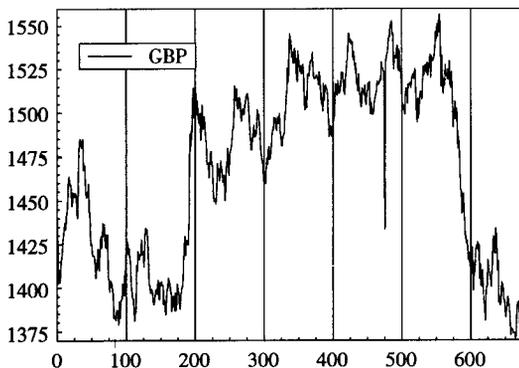


图7 GBP序列图

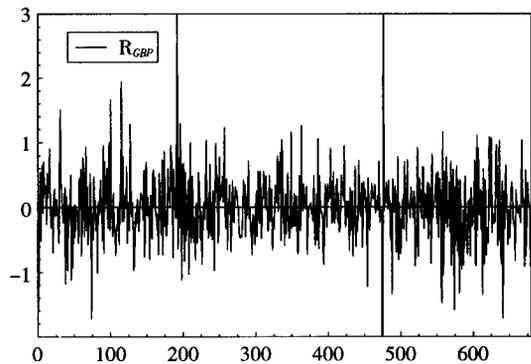


图8 R\_GBP序列

表 1 分别给出了  $R_{CNY}$ 、 $R_{EUR}$  以及  $R_{GBP}$  序列的描述性统计量。从偏度统计量和峰度统计量可以看出, 三种对数收益率序列都具有明显的“尖峰厚尾”特征, 同时, J - B 正态性检验统计量及相应的概率 P 值结果进一步说明, 三种对数收益率序列均显著拒绝服从正态分布的原假设。

表 1 对数收益率序列的描述性统计量

指数	均值	标准差	偏度	峰度	J - B 正态检验	
					J - B 统计量	概率 P 值
$R_{CNY}$	0.02485	0.11092	3.81319	49.89908	63967.74030	0.00000
$R_{EUR}$	0.01122	0.60608	0.26841	32.35712	24426.97127	0.00000
$R_{GBP}$	-0.00719	0.61800	0.56250	34.63613	28393.12066	0.00000

由于 MBP 方法和 IFM 方法均以 EML 方法为基础, 在此, 以 EML 方法作为参照基准, 利用方程 (33) ~ (36) 所描述的 Copula - MGARCH (1, 1) 模型, 比较 MBP 方法和 IFM 方法的有效性, 其中, 将 MBP 方法的迭代次数  $k$  设为 10, MBP 方法的初值由 IFM 方法的参数估计得到。鉴于 EML 方法对样本数量的要求问题, 基于  $R_{CNY}$ 、 $R_{EUR}$  以及  $R_{GBP}$  数据中前 500 个样本 ( $n=500$ ), 对 Copula - MGARCH 模型的参数进行估计后所得结果如表 2 所示。可以看到, 在利用 EML 方法得到的参数估计结果中,  $R_{CNY}$  与  $R_{EUR}$  以及  $R_{GBP}$  与  $R_{EUR}$  之间的相关系数分别为  $\rho=0.365753$  以及  $\rho=0.459935$ , 这说明  $R_{CNY}$  与  $R_{EUR}$  以及  $R_{GBP}$  与  $R_{EUR}$  之间存在一定程度的相关关系, 这与图 4、图 6 及图 8 所示的结果相吻合。同时注意到, 利用 MBP 方法所得到的参数估计值比运用 IFM 方法所得到的参数估计值更接近于 EML 方法所得到的参数估计值。

表 2 Copula - MGARCH 模型的参数估计结果 ( $n=500$ )

	方法	$\omega_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\omega_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	$\rho$
$R_{CNY} - R_{EUR}$	EML	0.00038	0.02650	0.96898	0.00020	0.16349	0.80293	0.36575
	MBP	0.00037	0.03021	0.96540	0.00020	0.16349	0.80291	0.36665
	IFM	0.00051	0.02250	0.97323	0.00019	0.16163	0.81338	0.36933
$R_{GBP} - R_{EUR}$	EML	0.30583	0.11051	2.3730e-07	0.34863	0.01865	1.2577e-07	0.45994
	MBP	0.30528	0.11043	1.2023e-07	0.34792	0.01986	1.1032e-06	0.45754
	IFM	0.30425	0.11167	8.5285e-08	0.31780	0.08838	5.1694e-08	0.40455

表 3 分别给出了运用 EML 方法、MBP 方法以及 IFM 方法得到的固定条件 (协) 方差矩阵的均值和方差结果。 $\hat{h}_{CNY}$  和  $\hat{h}_{EUR}$  分别代表  $R_{CNY} - R_{EUR}$  中  $R_{CNY}$  和  $R_{EUR}$  的固定条件方差,  $t$  时刻变量  $R_{CNY,t}$  和  $R_{EUR,t}$  之间的条件协方差  $\hat{h}_{CNY-EUR,t} = \hat{\rho}_{CNY-EUR} \sqrt{\hat{h}_{CNY,t} \hat{h}_{EUR,t}}$ ;  $\hat{h}_{GBP}$  和  $\hat{h}'_{EUR}$  分别代表  $R_{GBP} - R_{EUR}$  中  $R_{GBP}$  和  $R_{EUR}$  的固定条件方差,  $t$  时刻变量  $R_{GBP,t}$  和  $R_{EUR,t}$  之间的条件协方差  $\hat{h}_{GBP-EUR,t} = \hat{\rho}_{GBP-EUR} \sqrt{\hat{h}_{GBP,t} \hat{h}'_{EUR,t}}$ 。在此, 仍以 EML 估计结果为参照基准。均值结果和方差结果都表明, IFM 方法较 MBP 方法过度估计了条件 (协) 方差矩阵。

表 3 固定条件 (协) 方差矩阵的均值与方差 (n=500)

		均值			方差		
		EML	MBP	IFM	EML	MBP	IFM
$R_{CNY} - R_{EUR}$	$\hat{h}_{CNY}$	0.009889	0.009977	0.010351	0.000900	0.000928	0.000953
	$\hat{h}_{EUR}$	0.227176	0.242592	0.248116	0.010264	0.011858	0.011943
	$\hat{h}_{CNY-EUR}$	0.012624	0.013735	0.014318	5.1301E-05	0.000146	0.000154
$R_{GBP} - R_{EUR}$	$\hat{h}_{GBP}$	0.351311	0.350851	0.350342	0.080445	0.080171	0.081989
	$\hat{h}'_{EUR}$	0.356263	0.356149	0.354075	0.001995	0.002262	0.004707
	$\hat{h}_{GBP-EUR}$	0.160367	0.159418	0.140253	0.001909	0.001954	0.004882

以 EML 方法所得到条件协方差  $\sigma_i^2$  为参照基准, 可以考虑均方误差 (Root Mean Squared Error, RMSE) 和绝对离差 (Mean Absolute Deviation, MAD) 这两个评判 IFM 方法和 MBP 方法估计效率优劣的准则:

$$RMSE = \left[ \frac{1}{N} \sum E (\hat{h}_i - \sigma_i^2)^2 \right]^{1/2}, \quad MAD = \frac{1}{N} \sum E |\hat{h}_i - \sigma_i^2|$$

表 4 给出了基于 RMSE 和 MAD 准则, IFM 方法和 MBP 方法的估计效率比较结果。所有条件 (协) 方差矩阵的 RMSE 检验结果表明, MBP 估计方法优于 IFM 估计方法。进一步考虑百分比 (RMSE (%) = RMSE/E ( $\sigma_i^2$ )) 度量方法, 可以看到, 与 IFM 方法相对应的 RMSE (%) 值均大于与 MBP 方法相对应的 RMSE (%) 值。而 MAD 及其百分比检验值仍然证明 MBP 方法能够更准确地得到 Copula - MGARCH 模型条件 (协) 方差矩阵的估计值。

表 4 IFM 方法和 MBP 方法的效率比较 (n=500)

		RMSE	RMSE (%)	MAD	MAD (%)
$R_{CNY} - R_{EUR}$	$\hat{h}_{CNY}^{IFM}$	0.017557	1.782566	0.002878	0.292231
	$\hat{h}_{CNY}^{MBP}$	0.017343	1.760842	0.002590	0.262964
	$\hat{h}_{EUR}^{IFM}$	0.044492	0.196639	0.023459	0.103679
	$\hat{h}_{EUR}^{MBP}$	0.042705	0.188738	0.019545	0.086382
	$\hat{h}_{CNY-EUR}^{IFM}$	0.007045	0.560315	0.002597	0.206577
	$\hat{h}_{CNY-EUR}^{MBP}$	0.006625	0.526944	0.002217	0.176336
$R_{GBP} - R_{EUR}$	$\hat{h}_{GBP}^{IFM}$	0.293909	0.839965	0.058380	0.166845
	$\hat{h}_{GBP}^{MBP}$	0.292255	0.835240	0.058066	0.165947
	$\hat{h}'_{EUR}^{IFM}$	0.194790	0.548955	0.044636	0.125793
	$\hat{h}'_{EUR}^{MBP}$	0.049935	0.140728	0.010560	0.029762
	$\hat{h}_{GBP-EUR}^{IFM}$	0.060127	0.376440	0.029217	0.182923
	$\hat{h}_{GBP-EUR}^{MBP}$	0.045072	0.282187	0.012874	0.080601

表 5 给出了运用 Copula - MGARCH 模型基于  $R_{CNY}$ 、 $R_{EUR}$  以及  $R_{GBP}$  全样本数据 (n=680) 的估计结果, 注意到,  $R_{CNY}$  与  $R_{EUR}$  以及  $R_{GBP}$  与  $R_{EUR}$  之间的相关系数分别为  $\rho=0.420573$  以及  $\rho=0.394449$ , 这也进一步证实了图 4、图 6 及图 8 所示的结果。此外, 运用 Copula - MGARCH 模型对  $R_{CNY}$ 、 $R_{EUR}$  以及  $R_{GBP}$  序列进行估计所得到的波动性情况如图 9、图 10 以

及图 11 所示, 可以看到,  $R_{CNY}$  序列的波动性在样本前期较为平缓、近期较为剧烈,  $R_{EUR}$  序列的波动性总体上相对平缓, 而  $R_{GBP}$  序列的波动性总体上相对剧烈, 同时注意到, 近年来三种收益率序列的波动性都很显著。

表 5 Copula - MGARCH 模型的参数估计结果 ( $n=680$ )

	$\omega_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\omega_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	$\rho$
$R_{CNY} - R_{EUR}$	0.000996	0.034503	0.961042	0.000188	0.183919	0.800860	0.420573
$R_{GBP} - R_{EUR}$	0.295641	0.116233	1.3284e-08	0.318810	0.023884	6.5810e-07	0.394449

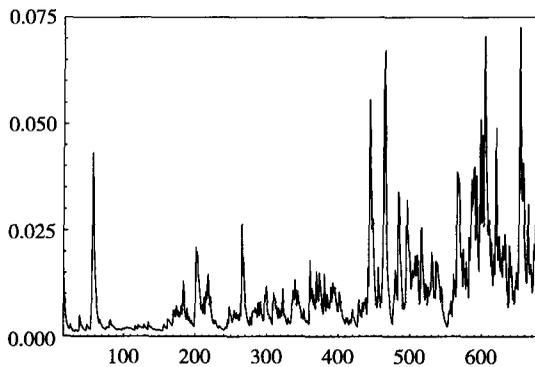


图 9  $R_{CNY}$  波动性序列

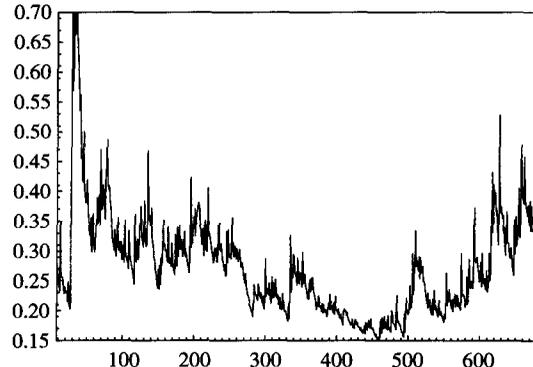


图 10  $R_{EUR}$  波动性序列

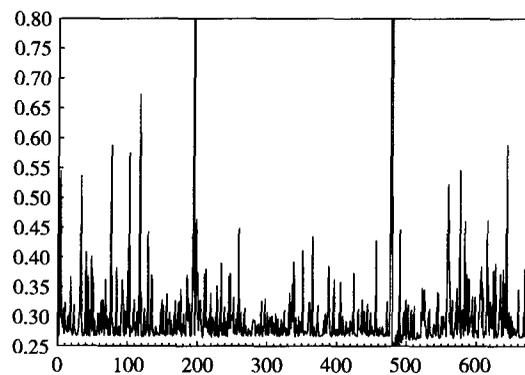


图 11  $R_{GBP}$  波动性序列

在运用 MGARCH 模型进行估计检验时, 通常假设金融收益率序列服从一个特定的多元椭圆分布 (例如, 多元正态分布或多元 Student - t 分布), 然而, 多元椭圆分布虽然形式简单、计算方便, 但却不能准确体现金融时间序列数据所具有的“尖峰厚尾”及非对称等特性。而 Copula 函数的提出, 使金融收益率序列假设服从非椭圆分布的构想成为可能, 进而利用 Copula - MGARCH 模型可以研究由不同的边缘分布和 Copula 函数所构成的更为灵活多样的联合分布函数。

两步优化估计方法 IFM 被广泛应用于 Copula - GARCH 模型的参数估计当中, 然而, 当所研究的样本容量较小时, IFM 估计方法会产生较大的估计偏差, 因此本文采用多步优

化的 MBP 估计方法来估计 Copula - MGARCH 模型。无论是通过 MonteCarlo 方法仿真模拟得到的检验结果, 还是对  $R_{\text{CNY}}$ 、 $R_{\text{EUR}}$  以及  $R_{\text{GBP}}$  序列进行实证检验而得到的经验结论, 都表明 MBP 估计方法比 IFM 估计方法更有效。最后, 通过对  $R_{\text{CNY}}$ 、 $R_{\text{EUR}}$  以及  $R_{\text{GBP}}$  序列进行实证检验, 得到关于汇率市场中的几个重要变化特征。

#### 参考文献

- [1] 韦艳华、张世英、孟利锋:《Copula 理论在金融上的应用》[J],《西北农林科技大学学报》2003 年第 3 期。
- [2] 张尧庭:《连接函数 (Copula) 技术与金融风险分析》[J],《统计研究》2002 年第 4 期。
- [3] 张尧庭:《我们应该选用什么样的相关性指标》[J],《统计研究》2002 年第 9 期。
- [4] 张明恒:《多金融资产风险价值的 Copula 计量方法研究》[J],《数量经济技术经济研究》2004 年第 4 期。
- [5] Jondeau, E., Rockinger, M., 2001. The Copula - MGARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock - Market Application, forthcoming, Journal of International Money and Finance.
- [6] Lee, T. H., Long, X., 2005. Copula - based Multivariate GARCH Model with Uncorrelated Dependent Errors, University of California, Riverside, working paper series.
- [7] Nelsen, R. B. 1998. An Introduction to Copulas, Springer - Verlag, New York.
- [8] Palaro, H. P., Hotta, L. K. 2006. Using Conditional Copula to Estimate Value at Risk, Journal of Data Science 4, 93~115.
- [9] Patton, A. 2000. Modelling Time - Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula, University of California, San Diego, Discussion Paper 01~09.
- [10] Sklar, A. 1959. Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges, Publications de Institut Statistique de Universite de Paris 8, 229231.
- [11] Song, P., Y. Fan, J. Kalbfleisch, 2005. Maximization by Parts in Likelihood Inference, Journal of the American Statistical Association 100, 1145~1158; Rejoinder to Discussants, Journal of the American Statistical Association 100, 1164~1167.
- [12] Taylor, S., 1986. Modeling Financial Time Series. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- [13] Xu, J. J. 1996. Statistical modeling and inference for multivariate and longitudinal discrete response data. PhD thesis, Statistics Department, University of British Columbia.

(责任编辑:王 静;校对:秋 文)