

生“维数诅咒”。

本文除第一部分引言外,第二部分对 ARCH 模型、ARCH 效应以及非参数 ARCH 模型及其估计方法进行了介绍,第三部分实证将参数与非参数 ARCH 模型应用于我国沪深指数波动的研究。

## 二 模型及方法

### (一) ARCH 模型

ARCH 模型被认为是最能集中反映方差变化特点而被广泛应用于金融时间序列分析的模型。该模型解释了收益率序列中比较明显的变化是否具有规律性,并且说明了这种变化前后依存的内在传导是来自某一特定类型的非线性结构,从而可以较好地刻画外部冲击形成的波动集聚性。将某资产在  $t$  时刻的对数收益率记为  $\{r_t | t=1, \dots, n\}$ , 下面是  $k$  个变量 ARCH( $p$ ) 模型的条件均值方程形式:

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_k x_{kt} + a_t \quad (1)$$

条件方差方程形式:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p a_{t-p}^2 \quad (2)$$

其中  $\{\varepsilon_t\} \sim \text{IID}(0, 1)$ ,  $\alpha_0 > 0$ , 对  $i > 0$  有  $\alpha_i \geq 0$ 。通常假定  $\varepsilon_t$  为正态分布,  $t$  分步或广义误差分布。条件异方差模型就是以各种形式的波动率方程来描述  $\sigma_t^2$  的, 模型的估计可以由极大似然方法得到。

### (二) ARCH 效应检验

在建立 ARCH 模型族之前,首先要对均值方程的残差进行 ARCH 效应检验,只有检验结果显著,说明残差具有异方差性才能在此基础上建立相应的 ARCH 模型。检验 ARCH 效应有两种方法:LM 检验法(拉格朗日乘数检验法)和对残差的平方相关图检验。对于 ARCH 效应的检验,通常对序列  $\{a_t^2\}$  用 Ljung-Box 统计量,参见 McLeod 和 Li(1983)<sup>[9]</sup>。该检验原假设为  $\{a_t^2\}$  前  $m$  个间隔的自相关函数(ACF)值为 0, 当相应 Q 统计量的 P 值接近零时,说明序列具有很强的 ARCH 效应。

### (三) 非参数 ARCH 模型

针对(2)式形式的 ARCH 模型,其对应的非参数 ARCH 模型形式如下:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = f(a_{t-1}, \dots, a_{t-p}) \quad (3)$$

其中  $\{\varepsilon_t\} \sim \text{IID}(0, 1)$ ,  $f(\cdot)$  是  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  的严格正函数。将上式改为具有函数系数模型的形式:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \omega_1(a_{t-d}^2) a_{t-1}^2 + \dots + \omega_p(a_{t-d}^2) a_{t-p}^2 \quad (4)$$

令  $Y_t = a_t^2, U_t = Y_{t-d}^2, z_{t1} = Y_{t-1}, \dots, z_{tp} = Y_{t-p}$ , 则上式可写为如下形式:

$$\begin{cases} Y_t = \omega_1(U_t) z_{t1} + \dots + \omega_p(U_t) z_{tp} + V_t \\ V_t = [\omega_1(U_t) z_{t1} + \dots + \omega_p(U_t) z_{tp}] (\varepsilon_t^2 - 1) \end{cases} \quad (5)$$

其中  $E(V_t) = 0, \text{cov}(V_s, V_t) = 0, s < t$ 。假设  $\omega_j(\cdot)$  具有连续二阶导数,采用局部多项式法对  $\omega_j(\cdot)$  进行估计,将  $U$  在  $u_0$  处做 Taylor 展开得

$$\omega_j(U) \approx \omega_j(u_0) + \omega'_j(u_0)(U - u_0) \equiv \varphi_j + \psi_j(U - u_0)$$

为了求出  $\varphi_j$  和  $\psi_j$  的估计值,需使下式达到最小

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - \sum_{j=1}^p \{\varphi_j + \psi_j(U_i - u_0)\} z_{ij}]^2 K_h(U_i - u_0) \quad (6)$$

其中  $K_h(\cdot) = h^{-1} K(\cdot/h)$ ,  $K(\cdot)$  为核函数,  $h$  为窗宽。令  $Y = (y_1, \dots, y_n)^T, W(u_0) = \text{diag}(K_h(U_1 - u_0), \dots, K_h(U_n - u_0))$ ,

$Z =$

$$\begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{1p} & (U_1 - u_0) z_{11} & \dots & (U_1 - u_0) z_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & \dots & z_{np} & (U_n - u_0) z_{n1} & \dots & (U_n - u_0) z_{np} \end{bmatrix}_{n \times 2p}$$

设  $\beta = (\omega_1, \dots, \omega_p, \psi_1, \dots, \psi_p)^T$ , 则局部回归(6)式可写为

$$(Y - Z\beta)^T W(Y - Z\beta)$$

由最小二乘估计,所要估计的参数  $\beta$  即为

$$\beta = (Z^T W Z)^{-1} Z^T W Y \quad (7)$$

$$\hat{\omega}_j(u_0) = \hat{\varphi}_j = \beta_{j,2p}^T \beta$$

上式可以用核函数表示成以下形式:

$$\hat{\omega}_j(u_0) = \sum_{i=1}^T K_{i,j}(U_i - u_0, X_i) Y_i$$

其中

$$K_{i,j}(u, x) = \beta_{j,2p}^T (Z^T W Z)^{-1} \begin{pmatrix} x \\ ux \end{pmatrix} K_h(u)$$

### (四) 窗宽和依赖变量的选取

确定上述问题的窗宽方法有很多,本文采用 Cai, Fan 和 Yao(2000)<sup>[8]</sup> 提出的一个简单快捷的改进多重交叉核实准则来确定模型中的窗宽和依赖变量,该准则对于平稳时间序列数据结构特别适用。令  $m$  和  $Q$  为两个给定的正整数,且  $T > mQ$ 。其核心思想是:首先利用长度为  $n - mQ$  ( $q = 1, \dots, Q$ ) 的  $Q$  个子序列估计未知系数函数,然后基于估计的模型来计算下一个长度为  $m$  部分的一步预测误差。如

此滚动进行估计和预测。

设  $\hat{\omega}_{j,q}(\cdot)$  为用第  $q$  个 ( $q = 1, \dots, Q$ ) 子序列  $\{(U_i, X_i, Y_i), 1 \leq i \leq T - qm\}$ , 窗宽为  $h \{T/(T - qm)\}^{1/5}$  所估计的系数。利用第  $q$  个子序列所得的平均预测误差为:

$$AMS_q(h) = \frac{1}{m} \sum_{i=n-qm+1}^{n-qm+m} \{Y_i - \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_{j,q}(U_i) X_{i,j}\}^2$$

则总平均误差为:

$$AMS(h) = Q^{-1} \sum_{q=1}^Q AMS_q(h) \quad (8)$$

本文所选取的窗宽为使得  $AMS(h)$  达到最小的窗宽。在实际计算中,可以取  $m = [0.1n]$  和  $Q = 4$ 。所选择的窗宽并不精确地依赖  $m$  和  $Q$  的选择,只要  $mQ$  相对比较大使得预测误差的计算稳定即可。函数  $AMS(h)$  可以通过比较其在网格点  $h_j = a^j h_0$  ( $j = 1, \dots, J$ ) 上的值求得最小值。

### 三 实证分析

#### (一) 数据选取及检验

##### 1. 数据选取及处理

这里选用我国 2007 年 5 月 15 日至 2012 年 3 月 9 日的上证综指和深证成指每日收盘数据为样本进行研究,选用 2012 年 3 月 12 日至 16 日的每日收盘数据作为预测期。将两组数据分别记为 SZ 和 SC,取对数做差分,得到相应的收益率序列,见图 1、图 2。

从图 1、图 2 可以看出上证指数、深证成指收益率数据均在 0 附近震荡,两市月度收益率数据的震荡幅度在  $\pm 0.1$  之间,对数收益率波动具有时变性、

表 1 沪深两市收益率的统计特征

变量	均值	标准差	偏度	峰度	J-B 统计量	p 值
上证指数	-0.0004	0.0198	-0.2731	5.3992	296.9302	0
深证成指	-0.00014	0.0222	-0.29295	4.5179	127.842	0

由表 1 可知,上证指数和深证成指对数收益率序列均值 (Mean) 均趋于 0,偏度 (Skewness) 均小于 0,说明序列分布有长的左拖尾。峰度 (Kurtosis) 均大于 4,高于正态分布的峰度值 3,说明收益率序列具有尖峰和厚尾的特征。Jarque - Bera 统计量分别为 279.578 和 127.842, P 值为 0,拒绝该对数收益率序列服从正态分布的假设。

2. 平稳性检验 对于上述沪深指数收益率序列进行平稳性检验,检验结果如下:

表 2 表明,沪深两市收益率序列均平稳,故平稳性也得到了满足。

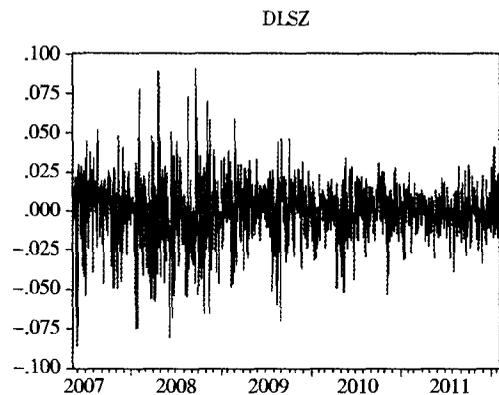


图 1 上证指数收益率

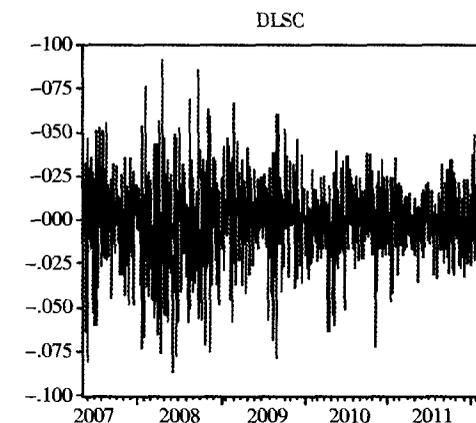


图 2 深证成指收益率

突发性和集群现象;波动在一些时间段内非常大(例如 2008 年),在有的时间段内则较小(例如 2011 年),说明误差项可能具有条件异方差性。两者的波动方向趋于一致。

表 2 沪深两市收益率 ADF 检验结果

变量	ADF 检验 -t 值	显著性水平	p 值	检验结果
上证指数	-34.2922	-3.4357 *	0	平稳
深证成指	-32.52922	-3.43578 *	0	平稳

注: \* 表示 1% 显著性水平。

#### 3. ARCH 效应检验

将两组收益率数据去均值化并取平方,得到残差的平方,自相关和偏相关图如下:

从下页表 3、表 4 可以看出自相关系数和偏相关系数显著不为 0, Q 统计量也非常显著,故沪深两市收益率数据存在 ARCH 效应。

表 3 上证指数收益率残差平方自相关和偏相关图

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
■	■	1 0.129	0.129	19.705	0.000
■	■	2 0.087	0.041	25.516	0.000
■	■	3 0.155	0.145	51.904	0.000
■	■	4 0.124	0.089	70.097	0.000
■	■	5 0.096	0.063	80.933	0.000
■	■	6 0.121	0.080	98.258	0.000
■	■	7 0.140	0.092	121.59	0.000
■	■	8 0.115	0.062	137.26	0.000
■	■	9 0.065	0.007	142.24	0.000

表 4 深证成指收益率残差平方自相关和偏相关图

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
■	■	1 0.121	0.121	17.114	0.000
■	■	2 0.087	0.073	25.885	0.000
■	■	3 0.112	0.095	40.420	0.000
■	■	4 0.123	0.097	57.982	0.000
■	■	5 0.079	0.044	65.336	0.000
■	■	6 0.111	0.078	79.737	0.000
■	■	7 0.131	0.090	99.781	0.000
■	■	8 0.150	0.104	126.17	0.000
■	■	9 0.051	-0.008	129.21	0.000

(二) 模型估计

1. 参数 ARCH 模型估计结果

将取对数得到的  $\{\ln(SZ_t)\}$  作为因变量,进行自回归,相应的 ARCH 模型滞后阶数为 1,得到的估计结果如下:

$$\text{均值方程: } \ln(SZ_t) = 0.0206 + 0.9974\ln(SZ_{t-1}) + a_t$$

$$z = (1.4078) (546.79)$$

$$\text{方差方程: } \sigma_{it}^2 = 0.00034 + 0.1366a_{t-1}^2 \quad (9)$$

$$z = (25.39) (4.6)$$

$$R^2 = 0.9945 \quad \text{对数似然值} = 2911 \quad \text{AIC} = -5.01 \quad \text{SC} = -4.99$$

相应的  $\{\ln(SC_t)\}$  作为因变量,进行自回归,得到方差方程为 ARCH(1) 的估计结果如下:

$$\ln(SC_t) = 0.0334 + 0.99641\ln(SC_{t-1}) + a_t$$

$$z = (1.61) (448.37)$$

$$\text{方差方程: } \sigma_{2t}^2 = 0.00042 + 0.1543a_{t-1}^2 \quad (10)$$

$$z = (23.81) (4.71)$$

$$R^2 = 0.9922 \quad \text{对数似然值} = 2783 \quad \text{AIC} = -4.8 \quad \text{SC} = -4.78$$

由上述对沪深两市估计的 ARCH(1) 模型,可以看出两组方程的 ARCH 项系数均大于 0.995,说明沪深两市的波动具有很强的波动聚集性和持续性。

2. 非参数 ARCH 模型估计结果

本文中非参数 ARCH 模型的估计方法采用 R 软件编程,并加载程序包 tsDyn,核函数的选取为高斯核函数,取  $Q=4, m=[0.1n], p \in [1, 5], d \in [1,$

$p]$ ,在  $p, d$  的取值范围内,本文得到的上证指数情形中的网格点  $h_j = 0.0005 + 0.0001j (j = 1, 2, \dots, 30)$ ,对于深证成指情形  $j = 1, 2, \dots, 31$ 。对方差方程(9)和(10)式,应用非参数 ARCH 模型进行估计,所选取的  $p, d$  值均为 2,经计算得到最优窗宽分别为 0.0039 和 0.004。

图 3a 和图 3b 为上证指数非参数 ARCH 模型的局部线性估计  $\hat{a}_1(\cdot)$  和  $\hat{a}_2(\cdot)$ ;图 4a 和图 4b 为深证成指非参数 ARCH 模型的局部线性估计  $\hat{a}_1(\cdot)$  和  $\hat{a}_2(\cdot)$ 。

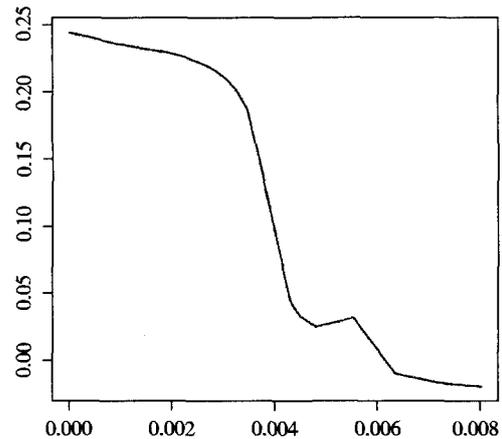


图 3a 上证指数非参数 ARCH 模型的  $\hat{a}_1(\cdot)$

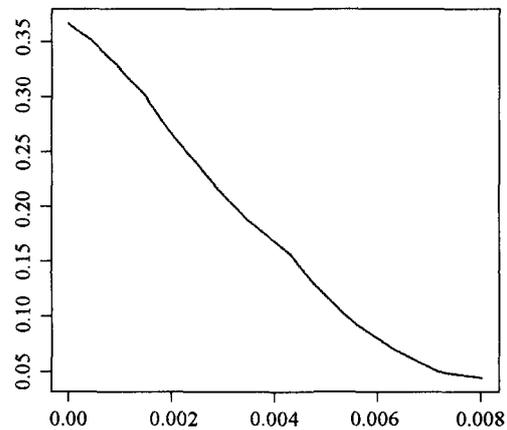


图 3b 上证指数非参数 ARCH 模型的  $\hat{a}_2(\cdot)$

下页表 5 为两种参数与非参数估计方法得到的均方误差(MSE),从表 5 可以看出上证指数波动率的非参数 ARCH 模型的估计精度明显优于参数 ARCH 模型的估计精度,而深证成指波动率的非参数 ARCH 模型的估计精度却低于参数 ARCH 模型的估计精度,其可能的原因是:第一,ARCH 模型分析针对的是均值方程的随机误差项进行建模,而非真实数据,这表明建模的依据本身就不是可以精确度量的数据,故据此产生的估计结果可能会有一定

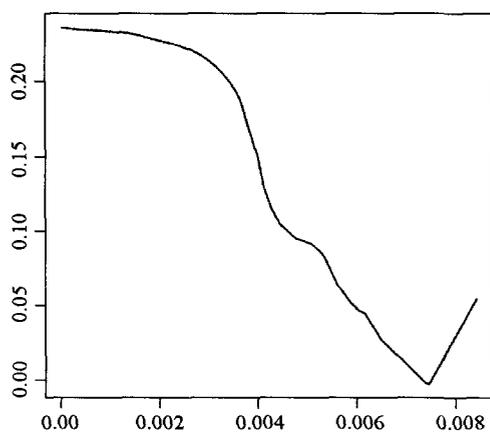


图4a 深证成指非参数 ARCH 模型的  $a_1(\cdot)$

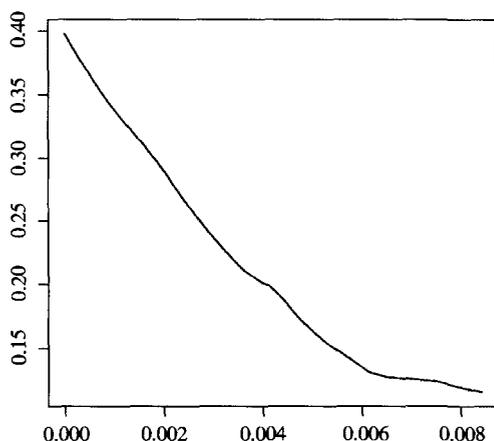


图4b 深证成指非参数 ARCH 模型的  $a_2(\cdot)$

的误差;第二,深证成指数据要大于上证成指,故得到的 ARCH 方程中数据波动更大些,所产生的误差也会更大。但是总体而言,两种方法得到的估计的均方误差都是很小的。

表5 参数与非参数 ARCH 模型得到的 MSE

	ARCH 模型	非参数 ARCH 模型
上证指数	6.86E-07	4.92E-07
深证成指	8.32E-07	1.15E-06

### (三) 模型预测

下面的表6、表7分别为用两种方法得到的沪深指数收益率样本期外预测结果,从表6针对沪市非参数 ARCH 模型的预测结果整体上好于 ARCH 模型预测结果。表7可以看出,深市收益率的预测结果,参数与非参数 ARCH 模型表现相当。

## 四 结论

本文将非参数函数系数模型应用于对 ARCH 模型的估计,由局部线性回归得到非参数 ARCH 模型的估计方法。由于本文选用的样本期数据从2007年5月15日至2012年2月15日,涵盖了沪深

表6 两种模型对上证指数收益率绝对值预测结果比较

时间	真实值	ARCH 预测值	非参数 ARCH 预测值
2012-3-12	0.00189	0.00192	0.00424
2012-3-13	0.00856	0.00852	0.00018
2012-3-14	0.02664	0.02666	0.00249
2012-3-15	0.00733	0.00742	0.00751
2012-3-16	0.01296	0.01286	0.00920

表7 两种模型对上证指数收益率绝对值预测结果比较

时间	真实值	ARCH 预测值	非参数 ARCH 预测值
2012-1-16	0.00525	0.00532	0.00511
2012-1-17	0.00078	0.00131	0.00074
2012-2-20	0.00064	0.00040	0.00085
2012-2-21	0.00820	0.00767	0.00626
2012-2-22	0.02525	0.01654	0.02872

两市从“一鸣惊人”到“一蹶不振”的波动情况,若要进一步细化分析,可以考虑将相应的数据按照经验或者股市的重要经历进行分段分析。文章得到的主要结论如下:参数 ARCH 模型可以对变量进行解释,给出具体表达式的预测方程,对于上证指数参数 ARCH 模型估计精度及预测效果要低于非参数 ARCH 模型,而对于深证成指非参数 ARCH 模型估计精度略逊于 ARCH 模型,预测表现也平平。文章给出了基于函数系数模型的非参数 ARCH 模型及其估计方法,并将其应用于沪深两市波动率和收益率数据的描述及预测。

理论与现实意义在于可以通过参数与非参数方法相结合对我国沪深两市收益率进行总体的考察与研究,为防范股市大行情震荡所可能产生的风险提供了一定的理论基础。从宏观层面考察了我国沪深两市的收益率数据波动情况,有利于监管机构对我国股市波动的整体把握,对股市整体的健康稳定发展具有一定的意义。对个人投资者而言,可以在考虑大环境的前提下,可以更加理性的认识当前沪深两市的波动情况,进而对所面临的风险有一个大体的掌握。

所给出的相关建议如下:

(1) 坚决杜绝和防范依靠内部消息投机获利行为,加大股市内幕交易以及因人为操作带来的导致大量个人投资者损失的犯罪成本。<sup>[10]</sup>

(2) 进一步规范和完善股票市场建设,提高股市运行质量和效率,促进一级市场和二级市场协调发展。进一步完善上市公司再融资制度和投资者回报机制,引导和鼓励上市公司增加现金分红。

(3)正确引导投资者入市思想,加强投资者的风险意识,鼓励广大股民进行长期投资。

文章的缺陷在于并没有考虑股票市场数据的长记忆性,如果想在考虑异方差性的同时加入长记忆性的研究,可以考虑使用 FIARCH 模型进行分析。进一步的研究方向可以考虑将参数与非参数方法相结合,以克服非参数方法不能进行事前预测的缺陷。

**参考文献:**

[1] Engle R F, Lilien D M, Robins R P. Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH - M model[J]. *Econometrica*; *Journal of the Econometric Society*, 1987: 391 - 407.

[2] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity[J]. *Journal of econometrics*, 1986, 31 (3): 307 - 327.

[3] Engle R F, Lilien D M, Robins R P. Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH - M model[J]. *Econometrica*; *Journal of the Econometric Society*, 1987: 391 - 407.

[4] Nelson, D. B. Conditional Heteroskedasticity in Asset Pri-

cing: A New Approach[J]. *Econometrica*, 1991, 59, 347 - 370.

[5] Chen R, Tsay R S. Functional - coefficient autoregressive models[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1993, 88(421): 298 - 308.

[6] Tong H. Threshold models in non - linear time series analysis. *Lecture notes in statistics*, No. 21 [M]. Springer - Verlag, 1983.

[7] Haggan V, Ozaki T. Modelling nonlinear random vibrations using an amplitude - dependent autoregressive time series model[J]. *Biometrika*, 1981, 68(1): 189 - 196.

[8] Cai Z, Fan J, Yao Q. Functional - coefficient regression models for nonlinear time series [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2000, 95(451): 941 - 956.

[9] McLeod A I, Li W K. Diagnostic checking ARMA time series models using squared - residual autocorrelations[J]. *Journal of Time Series Analysis*, 1983, 4(4): 269 - 273.

[10] 陈留平, 胡悦. 上市公司内部控制信息披露研究—基于2012年沪市数据[J]. *江苏大学学报: 社会科学版*, 2013(6): 88 - 93.

## Nonparametric ARCH Model - based Research on the Volatility of Shanghai and Shenzhen Index

JIN Cheng - xiao, CAO Yang

(Research Center for Quantitative Economics, Jilin University, Changchun 130012, China)

**Abstract:** The research on the application of parametric and nonparametric ARCH model to the volatility of Shanghai and Shenzhen index from 15 May, 2007 to 9 March, 2012 in our country reached the following conclusions: the estimation precision and prediction results of the volatility of Shanghai stock index obtained by nonparametric ARCH model is superior to obtained made by the parametric ARCH model, while as for the volatility of Shenzhen component index the result of nonparametric estimation precision is lower than that of the ARCH model, with the predicted results alike; in general, the mean square error of both methods is very small. This article applies nonparametric ARCH model to the description of the Shanghai and Shenzhen index fluctuation, and objectively obtained the related conclusion and suggestions, which lays a foundation for the nonparametric ARCH model, as an alternative measure, to be applied to the research on the volatility of financial assets.

**Key words:** ARCH model; nonparametric; Shanghai and Shenzhen index; volatility

(责任编辑 耿晔强)