文章编号:1000-6788(2004)07-0038-06

CVaR 在金融工具复制上的应用

方　毅，张屹山
(吉林大学商学院，吉林 长春 130012)

摘要： Rockafellar R T，S Uryasev 将 CVaR 应用于金融工具的复制，其结论是 CVaR 能有效地改善复制的组合. 本文在他们研究的基础上，对其方法进行了改进，并将其应用于对中信指数的复制，探讨 CVaR 的理论意义与实际效果. 在对中信指数进行复制的过程中采用了样本区间内模拟和样本区间外模拟，并将两种方法进行了比较. 计算结果表明，可以通过一个线性优化问题将 CVaR 约束考虑到复制的组合中，CVaR 的值可以直接由一个线性函数确定，不用先计算 VaR 的值. 而且，当 CVaR 约束有效时 VaR 是确定组合的副产品. 最重要的发现是，CVaR 中损失函数对于控制复制组合的偏离方向有直接作用，Rockafellar R T，S Uryasev 的方法对于样本区间外的模拟是不起作用的；改进的方法对于样本区间外的模拟中 CVaR 约束是起作用的.

关键词： VaR；CVaR；损失函数；偏离度
中图分类号： F830.9　　　**文献标识码**： A

CVaR Applying on Financial Instrument Replication

FANG Yi，ZHENG Yi-shan
(Jilin University，Changchun 130012，China)

Abstract： CVaR(Conditional Value-at-Risk) is a new measure of risk based on VaR(Value-at Risk), which has good mathematic properties，can embody characters of risk. Rockafellar R. T.，S. Uryasev (2002) applied CVaR on financial instrument replication，and concluded that CVaR can improve portfolio of replication. This paper is，based on their study，mends their method，applies it on replication of Citic Index and discusses the academic significations and practical effects. The replication of Citic Index is conduced in in-sample calculation and out－sample calculation，and compares two methods. The results implies that we can add CVaR restrict into portfolio of replication by a LP problem，can achieve CVaR from a linear function directly without first calculating VaR. Furthermore，when CVaR restrict is effective，VaR can be obtained instead as a byproduct by determining portfolio of replication. The most important discovery is that the loss function of CVaR has effect on controlling deviation of portfolio，the method of Rockafellar R. T.，S. Uryasev(2002)is of no effect in out-sample calculation，but the improved method is availability in out-sample calculation.

Key words： VaR；CVaR；loss function；deviation

VaR(Value-at-Risk)作为一种风险度量的方法，逐渐成为国际上金融风险管理的一种流行的标准，受到了人们广泛的关注和讨论. VaR 是在正常的市场环境下，给定一定的时间区间和置信度水平，测度预期最大损失的方法. 但当损失是非正态分布时，由于损失分布表现出“厚尾”、“离散”的特性，VaR 就变得不够稳定，而且难于操作；这时，VaR 不具有次可加性和凸性[1]. 同时，VaR 只是给出了预期最大损失的阙值，并不能反映这种损失的可能性分布. 现在，与 Var 紧密相关的 CVaR(Conditional Value-at-Risk)作为另外一种新的度量风险的方法，不仅能弥补 VaR 很多缺陷，而且在应用于信用风险管理、组合优化、金融工具复制等等领域具有其独特的优越性，也逐渐得到发展. 本文正是讨论 CVaR 在金融工具复制上的应用.

收稿日期:2003-09-26
资助项目:教育部重点研究基金(02JAZJD790008)

作者简介:方毅(1976－)，男(汉族)，湖北人，研究生，研究方向微观金融理论，Email:ccfangyi@hotmail.com；张屹山(1949－)，男，吉林人，教授，博士生导师

1 CVaR 的定义及定理

1.1 CVaR 的定义

x 是决策向量，$x \in X$；y 是代表不确定因素的随机向量，$y \in Y$. 对每一个 x，相应 y 的损失函数是 $f(x, y)$，那么 $f(x, y)$ 不超过阈值 ξ 的概率为：

$$\psi(x,\xi) = \int_{f(x,y) \leq \xi} p(y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

若置信水平为 α，$\alpha \in (0,1)$，α-CVaR 可表示为：

$$\xi_\alpha(x) = \min\{\xi \in R : \psi(x,\xi) \geq \alpha\} \tag{2}$$

VaR 表示的是最大损失超过或等于的数值的概率为 $(1-\alpha)$ 的最小损失值. 而 CVaR 定义的是最大损失值超过或等于的数值的概率为 $(1-\alpha)$ 的平均损失值，α-CVaR 可表示为：

$$\phi_\alpha(x) = (1-\alpha)^{-1} \int_{f(x,y) \geq \xi_\alpha(x)} f(x, y) p(y)\mathrm{d}y \tag{3}$$

根据定义，不难得到：

$$\phi_\alpha(x) \geq \xi_\alpha(x) \tag{4}$$

可见，CVaR 与 VaR 相比考虑了损失尾部的分布，而且是一个更保守、谨慎的风险刻画指标.

1.2 CVaR 的定理

引入在 $X \times R$ 上的函数 $F_\alpha(x,\xi)$，具体形式如下：

$$F_\alpha(x,\xi) = \xi + (1-\alpha)^{-1} \int_{y \in Y} [f(x, y) - \xi]^+ p(y)\mathrm{d}y \tag{5}$$

其中，$[z]^+ = \max\{z, 0\}$，此处 $F_\alpha(x,\xi)$ 是凸的连续可微函数.

定理 1 $\phi_\alpha(x)$ 和 $\xi_\alpha(x)$ 可以用这个函数表现出来，即

$$\phi_\alpha(x) = \min_{\xi \in R} F_\alpha(x,\xi) \tag{6}$$

在这个公式中，ξ 的集合可由 $F_\alpha(x,\xi)$ 的最小值得到，即

$$A_\alpha(x) = \arg\min_{\xi \in R} F(x,\xi) \tag{7}$$

从而 α-VaR 为，

$$\xi_\alpha(x) = \inf A_\alpha(x) \tag{8}$$

那么，

$$\xi_\alpha(x) \in \arg\min_{\xi \in R} F_\alpha(x,\xi) \tag{9}$$

$$\phi_\alpha(x) = F_\alpha(x,\xi_\alpha(x)) \tag{10}$$

定理 2 对于所有 $x \in X$，取 x 使得 α − CVaR 为最小值，等价于在 $(x,\xi) \in X \times R$ 使得 $F_\alpha(x,\xi)$ 取最小值，即

$$\min_{x \in X} \phi_\alpha(x) = \min_{(x,\xi) \in X \times R} F_\alpha(x,\xi_\alpha(x)) \tag{11}$$

由定理 1、定理 2 可知，基于 $F_\alpha(x,\xi)$ 是连续可微的凸函数，可直接计算 α-CVaR，而不用根据定义先计算 α-VaR. 由(11)可知，当求得右边等于最小值得到 α-CVaR，对应的解为 (x^*, ξ^*)，x^* 为 α-CVaR 的决策向量；同时，ξ^* 为相应的 α-VaR. 从而，α-VaR 成为计算 α-CVaR 的一个副产品.

另外，对于 $F_\alpha(x,\xi)$ 可根据积分的定义，通过不同的方法近似，将其离散化，可以使其具有可加性. 在应用于求解最优化问题时，可使积分问题简化；所以，α-CVaR 在处理大规模数据方面是有其独到的优势的，这一点将在后面的金融工具的复制中加以详细的阐明.

2 CVaR 在金融工具复制上的应用

2.1 复制金融工具的 CVaR 理论模型

假定，需要复制的金融工具 C 在 t 时刻的价格为 $I_t, t = 1,2,\cdots,T$，w 为持有 C 的头寸；那么，T 时刻

持有 C 的总价值 $V = wI_T$. 用于复制的金融工具 $R_j, j = 1,2,\cdots,n$, y_{tj} 为 t 时刻 R_j 的价格，x_j 为 R_j 的头寸；那么，在 t 时刻 R_j 形成的组合的价值为 $\sum_{j=1}^{n} y_{tj} x_j$. 相对于金融工具 C 在 t 时刻的复制结果的相对偏离为 $\left|\left(wI_t - \sum_{j=1}^{n} y_{tj} x_j\right)/wI_t\right|$.

在这里，将金融工具的复制转化成一个优化问题：

1）目标函数

$$\min g(x) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\left(wI_t - \sum_{j=1}^{n} y_{tj}x_j\right)\right|/wI_t \tag{12}$$

2） 约束条件

① CVaR 约束

考虑决策者的风险承受值 CVaR 为 k，则

$$F_\alpha(x,\xi) = \xi + (1-\alpha)^{-1}\int_{y\in Y}[f(x,\ y) - \xi]^+\ p(y)\mathrm{d}y \le k \tag{13}$$

为了将上式中的积分问题简化，对 y 在 T 个时期分段处理，将 $F_\alpha(x,\xi)$ 离散化，可以得到

$$\widetilde{F}_\alpha(x,\xi) = \xi + [(1-\alpha)T]^{-1}\sum_{t=1}^{T}[f(x,\ y_t) - \xi]^+ \le k \tag{14}$$

② 价值约束

以 T 为基准时刻，使被复制的金融工具、用于复制的金融工具的组合的总的价值相等，那么

$$\sum_{j=1}^{n} y_{jT} x_j = V \tag{15}$$

③ 卖空约束

$$x_j \ge 0 \tag{16}$$

3）损失函数

Rockafellar R T, S Uryasev 对于决策变量 x，根据偏离定义损失函数为[2]：

$$f(x,\ y) = \left(wI_t - \sum_{j=1}^{n} y_{tj}x_j\right)/wI_t \tag{17}$$

可以看出，这个损失函数只是将复制组合的值小于被复制工具的值当做损失；当复制组合的值大于被复制工具的值时就不是损失. 所以，当将(17)作为损失函数时，CVaR 约束将只是对一个方向的偏离起作用，而对另一个方向的偏离并不是很起作用；也就是说，同目标函数的目标不是完全一致.

为了将复制组合的值大于被复制组合工具的值作为损失，也就是同时将两个方向的偏离都作为损失，使 CVaR 约束与目标函数的目标一致，这里将损失函数定义为：

$$f(x,\ y) = \left|\left(wI_t - \sum_{j=1}^{n} y_{tj}x_j\right)/wI_t\right| \tag{18}$$

4）线性化

引入变量 p、q 可以将将上面的 NP 问题线性化，这也是 CVaR 能够广泛应用于各个领域的一个主要优点. 这里令 $d_t = \left(wI_t - \sum_{j=1}^{n} y_{tj}x_j\right)/wI_t$，把 Rockafellar R. T., S. Uryasev 的优化方法定义为问题 1，损失函数修改为(18)的优化方法定义为问题 2，将不考虑 CVaR 约束的优化方法定义为问题 3，具体见表 1.

2.2 CVaR 实证研究的对象及数据

在这里，采用历史模拟的方法进行实证. 以涵盖 A 股 60%流通市值的中信指数做为被复制工具，按照

中信行业指数群,选取分布在 14 个行业的共 30 支股票① 为复制工具.

研究分为样本区间内模拟和样本区间外模拟两部分. 第一部分是样本区间内模拟,以 2000 年 1 月 4 日至 2002 年 12 月 31 日共计 716 个交易日的收盘价为研究对象,用 30 支股票复制中信指数(将指数的数值作为其收盘价),通过复制结果,探究 CVaR、VaR 及 CVaR 作为约束的作用. 第二部分是样本区间外模拟,进一步考察第一部分得到的组合从 2003 年 1 月 2 日至 2003 年 3 月 31 日共计 56 个交易日的表现,从而探讨复制组合的有效性.

表 1　优化问题

问题 1	问题 2	问题 3	问题 4
$\min \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t$ s.t. $d_t - p_t \le 0$ $-d_t - p_t \le 0$ $\xi + [(1-\alpha)T]^{-1}\sum_{t=1}^{T} q_t \le k$ $d_t - \xi - q_t \le 0$ $x_j \ge 0,\ p_t \ge 0,$ $q_t \ge 0,\ \xi \ge 0$ $\sum_{j=1}^{n} y_{jT} x_j = V$	$\min \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t$ s.t. $d_t - p_t \le 0$ $-d_t - p_t \le 0$ $\xi + [(1-\alpha)T]^{-1}\sum_{t=1}^{T} q_t \le k$ $p_t - \xi - q_t \le 0$ $x_j \ge 0,\ p_t \ge 0,$ $q_t \ge 0,\ \xi \ge 0$ $\sum_{j=1}^{n} y_{jT} x_j = V$	$\min \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t$ s.t. $d_t - p_t \le 0$ $-d_t - p_t \le 0$ $x_j \ge 0,$ $p_t \ge 0$ $\sum_{j=1}^{n} y_{jT} x_j = V$	$\max \xi$ s.t. $\xi + [(1-\alpha)T]^{-1}\sum_{t=1}^{T} q_t$ $\le k$ $d_t - \xi - q_t \le 0$ $q_t \ge 0$ $\xi \ge 0$ $\sum_{j=1}^{n} y_{jT} x_j = V$

数据来源于分析家,采用 EXCEL 与 LINGO 软件进行数据处理.

2.3　CVaR 的样本区间内模拟

在确定复制组合时,置信水平 $\alpha = 0.9$,持有 C 的头寸 $w = 1$,计算问题 1 时,决策者风险承受值 CVaR 对应值 k 从 0.001 取到 0.025;对于问题 2,当 k 小于 0.016 时得不到可行解,所以 k 从 0.0016 取到 0.0025. 为了考察 CVaR 约束的作用,还计算了没有 CVaR 约束的问题 3 的结果. 同时,为考察问题 1、问题 2 计算出的 VaR 值的准确性,将其与根据(8)对 VaR 定义计算出的实际结果,即表 1 中的问题 4 的结果进行比较.

图 1 中表示的是由解问题 1 得到的 CVaR 对应的目标函数 Object、ξ^* 的值 VaR-C 及由解问题 4 得到的 ξ^* 的值 VaR. 图 2 中表示的是由解问题 2 得到的 CVaR 对应的目标函数 Object、ξ^* 的值 VaR-C 及由解问题 4 得到的 ξ^* 的值 VaR.

综合图 1、图 2 可以发现,当 CVaR 小于某个阙值 k^* (对于问题 1, $k^* = 0.017$;对于问题 2, $k^* = 0.019$)时,目标函数随着 CVaR 值的增加而减少;同时,组合权重也发生了变化. 所以,在 CVaR 比较小时,其约束是起作用的. 但当 CVaR 大于等于 k^* 时,问题 1 的目标函数不随着 CVaR 的变化而变化,它的大小与除去 CVaR 约束计算问题 3 的目标函数完全相同;而且,复制组合的权重完全相同. 可见,在 CVaR 比较大时,其约束是不起作用的.

CVaR 约束是体现了决策者承受风险能力,也对应了决策者对未来损失的某个后悔值②. CVaR 越大决策者承受风险能力越强,对未来的情景就更乐观、更自信,后悔倾向就越弱,对应的后悔值就越小,那么就更加注重复制结果的相对偏离度. 相反,CVaR 越小决策者承受风险能力越弱,对未来的情景就更谨慎、更缺乏自信,后悔倾向就越强,对应的后悔值就越大,那么就更加注重复制结果的相对风险度. 当 CVaR

---

① 深发展 A、深万科 A、深能源 A、深鸿基 A、深国商、海王生物、深圳机场、四通高科、古井贡 A、天发股份、一汽轿车、大庆联谊、清华同方、三峡水利、中国泛旅、东湖高新、巨化股份、方正科技、嘉宝实业、第一百货、中远发展、爱建股份、上海强生、中华企业、耀华玻璃、华银电力、中储股份、华北制药、春兰股份、伊利股份.

② Carlos E. Testuri, Stanislav Uryasev. On Relation Between Expected Regret and Conditional Value-at-Risk, reseach report, University of Florida.

小于 k^*，正是体现了决策者在风险与偏离度的权衡，它是基于风险与目标的一种制衡关系的. 当 CVaR 大于等于 k^*，体现的是决策者承受的风险达到一定程度时，无需考虑风险因素的作用；也就是说，虽然风险因素对决策者的决策有影响，但其影响有一定限度，这意味着某些决策暗含的风险大于等于 k^*.

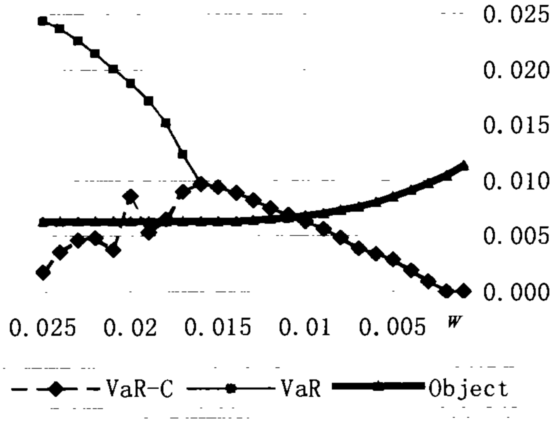

图 1 问题 1 的 CVaR，VaR 与目标函数

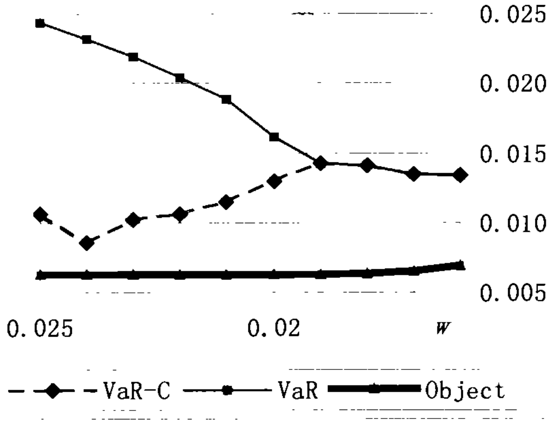

图 2 问题 2 的 CVaR，VaR 与目标函数

图 1、图 2 中还显示 CVaR 约束不起作用时，得到的 ξ^* 值与根据定义得到的 ξ^* 值相差很大；也就是 CVaR 约束不起作用时，计算出的 VaR 不准确，不能体现 VaR 与 CVaR 的关系. CVaR 约束起作用时，计算两个问题得到的 ξ^* 值几乎完全相同；也就是通过 CVaR 约束，顺便得到的 VaR 值是有效的. 同时，也能看出 VaR≤CVaR，VaR 值随 CVaR 值同向变化. 表 2 中给出了不同 k 值对应的样本区间内模拟的 VaR 与 CVaR 值.

表 2 CVaR 与 VaR

问题 1				问题 2			
2000-01 至 2002-12		2003-01 至 2003-03		2000-01 至 2002-12		2003-01 至 2003-03	
VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	
0.025	0.02438	0	0	0.025	0.02438	0.04375	0.04148
0.016	0.00965	0	0	0.016	0.01340	0.04362	0.04014
0.002	0.00004	0	0				

为了考察 CVaR 约束对复制组合的具体作用，图 3、图 4 中分别给出了采用不同的有效 CVaR 约束与无 CVaR 约束偏离度 d_t 的比较. 其中，$P0$ 代表问题 3 的解的组合，$P1$ 代表问题 1（$k=0.002$）的解的组合，P2 代表问题 2（$k=0.016$）的解的组合.

从图 3、图 4 可以看出，CVaR 约束无效和 CVaR 约束有效时，各个组合对中信指数的偏离度都很小，在 −6%～3% 之间，均能很好的对指数进行复制. 最值得的一提的是，无约束组合 d_t 在垂直轴的正、负值两个部分的分布比较对称；问题 1 中 CVaR 的损失函数定义的是小于指数的偏离为正，所以复制出的组合绝大多 d_t 都小于 0，集中在图 3 的垂直轴负值部分，而在垂直轴正值部分分布较少，与 Rockafellar R T，S Uryasev 得到的结果类似[2]；问题 2 中 CVaR 的损失函数定义了偏离指数的两个方向，所以它的 d_t 在垂直轴正、负值两个部分的分布也比较对称. 也就是说，CVaR 约束可以有效的控制组合对于复制金融工具的偏离方向.

2.4 CVaR 的样本区间外模拟

在前一部分中，无约束组合的目标函数最小，似乎无约束情况下的组合更有效，但由于是样本区间内模拟，决策向量 x 来自于这一段历史数据，所以增加约束后目标函数值将增加是可以预料的. CVaR 是面向未来进行风险控制的，所以要真正评价 CVaR 约束的作用，更有说服力是将其应用于其后一段时间的

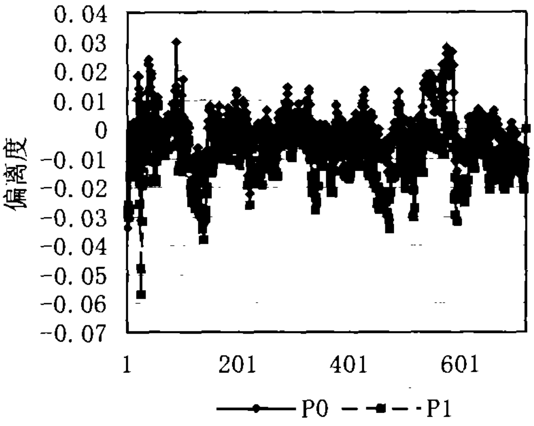

图 3　问题 1、问题 3 指数复制

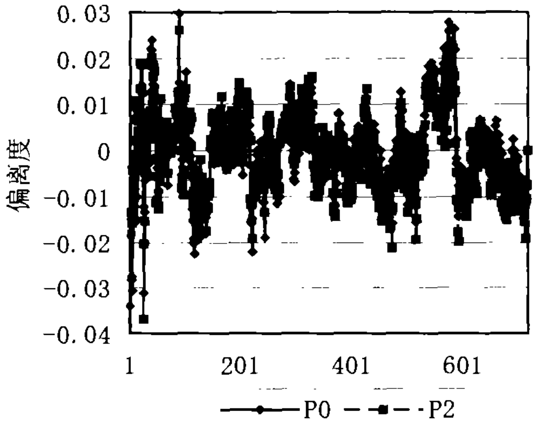

图 4　问题 1、问题 3 指数复制

样本区间外模拟．这里将前面得到的各个组合应用于 2003 年 1 月 2 日至 2003 年 3 月 31 日的 56 个交易日，将它们与中信指数进行比较．

图 5、图 6 中，分别给出了采用不同的有效 CVaR 约束与无效 CVaR 约束得到的组合偏离度 d_t 的比较．其中，$P0$ 代表问题 3 的解的组合，$P1$ 代表问题 1($k=0.002$) 的解的组合，$P2$ 代表问题 2($k=0.016$)的解的组合．

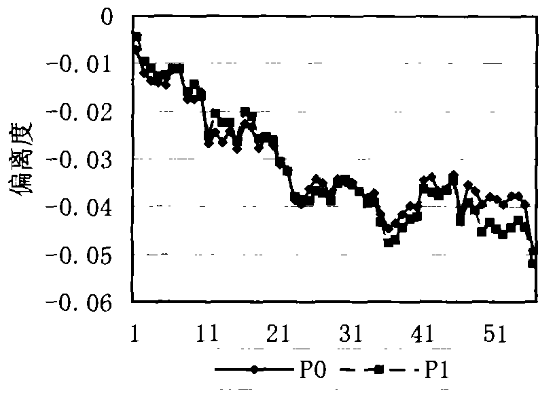

图 5　问题 1、问题 3 指数复制

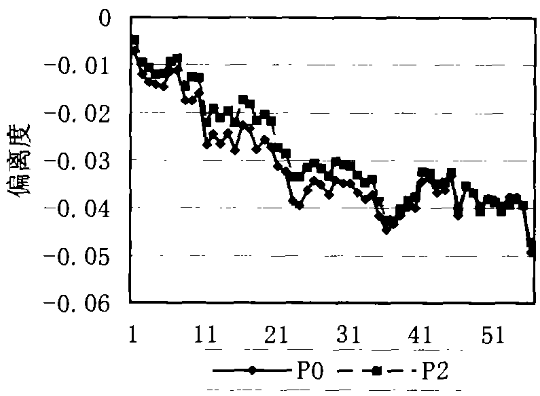

图 6　问题 1、问题 3 指数复制

从图 5、图 6 可以看出，即使在紧接着的 3 个月中，CVaR 约束无效和 CVaR 约束有效时，各个组合对中信指数的偏离度仍然都很小，在－6%～0 之间，均能很好的对指数进行复制．但比较有意思的是，在各个时刻所有的组合对中信指数的偏离 d_t 均为负值；也就是，在这一段时间内组合的价值大于中信指数的价值．因为，损失应为负值，所以按问题 1 定义损失函数得到的 VaR 及 CVaR 均应是 0，而按问题 2 定义损失函数得到的 VaR 及 CVaR 不应为 0．表 2 中也给出了不同 k 值对应的样本区间外模拟的 VaR 与 CVaR 值；其中，样本区间外模拟的 CVaR 与 VaR 值是根据定义(2)、(3)，通过相应样本区间内模拟组合在样本区间外模拟阶段的偏离得到的．

图 5 得到的重要发现是，$ P0 与 P1 $ 对中信指数的偏离无明显差异，这与 R T Rockafellar，S Uryasev 得到的结果完全不同[1]，他们得到的结果是由问题 1 得到的组合明显优于问题 3 得到的组合．对比这两个结果可以发现他们由问题 3 复制出的组合，相对于被复制的 S&P100 指数的偏离 d_t 绝大多数情况下都大于 0，正好与本文相反，由于问题 1 中 CVaR 约束对于正方向偏离的有效控制，所以得出的结论是问题 1 的组合可以更好的进行金融工具的复制．而现在由问题 3 得到的对中信指数复制的组合的 d_t 各个时刻都小于 0，问题 1 中的 CVaR 约束本身就没有对负方向的偏离进行考虑，所以两种组合无差异也是正常的．

（下转第 140 页）

5 总结

本文应用AHP法对潜艇作战能力进行了分析，从实例中可以看出要提高潜艇的战斗力发展高性能的导弹和鱼雷尤为重要，潜艇的隐蔽性和水声对抗能力也应高度重视．本模型的指标层还可以继续划分到性能层，通过对性能层的判断量化即可获得更详细的潜艇的作战能力指标．鉴于我国潜艇的现状，在分析的过程中没有加入潜艇的对空和对地作战能力分析．用AHP的方法对潜艇的作战能力只进行了静态的评估，没有考虑实战中各种变化因素和人的因素．但总体上本模型还是能够较为准确地反映实际情况，我们可以参照分析的结果对潜艇装备的建造和发展提供参考，也能对潜艇的战斗能力进行评估．

参考文献：

[1] Saaty T L. 层次分析法[M]. 北京：煤炭工业出版社，1986.

[2] 戴自立. 现代舰船作战系统[M]. 北京：兵器工业出版社，1989.

[3] 吕建伟，等. 舰船作战能力评估的效用函数方法研究[J]. 船舶工程，1999，(4)：58－61.

[4] 宋保维，等. 鱼雷系统评判的模糊层次分析法[J]. 水中兵器，2000，(4)：1－4.

(上接第43页)

图6中，$P0$比$P2$对中信指数的偏离明显要大，原因在于问题2中CVaR约束对于正、负两个方向偏离都有所限制，所以在由问题3得到的组合相对于被复制工具的d_t小于0的时候也能减小偏离，所以加入正负两个方向偏离考虑的CVaR约束对改进金融工具复制是有作用的．

3 结论

CVaR作为一种基于VaR的度量风险的工具，从定义上可以发现它比VaR更好的考虑了实际中风险分布的尾部特征，而且具有更好的数学性质，是一个比VaR更加谨慎的指标．同时，CVaR可以直接由$F_\alpha(x,\xi)$计算，而且可以将$F_\alpha(x,\xi)$离散化，在应用中十分方便；VaR成了其计算过程中的一个副产品．在金融工具的复制中，可以通过一个线性优化问题将CVaR约束考虑到复制的组合中，CVaR约束能够有效的改善复制组合；而且，其中损失函数的定义对于控制复制组合的偏离方向是有直接作用的．另外，只有当CVaR约束有效时，由CVaR约束计算出的VaR值才是有效的；否则，由CVaR约束计算出的VaR值是无效的．

参考文献：

[1] Artzner P, Delbaen F, Eber J-M, Heath D. Coherent measures of risk[J] Mathematical Finance 1999, 9:203－228.

[2] Rockafellar R T, Uryasev S. Conditional Value-at-risk for general loss distributions[J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7):1443－1471.

[3] Dembo R, Rosen D. The practice of portfolio replication a practical overview of forward and inverse problems[J]. Annals of Operations Research 1999, 85:267－284.

[4] Rockafellar R T, S Uryasev. Optimization of Conditional Value-At-Risk[J]. The Journal of Risk, 2000, 2(3): 21－41.