第48卷 第1期
2008年1月
吉林大学社会科学学报
Jilin University Journal Social Sciences Edition
Vol. 48 No. 1
Jan., 2008

□数量经济理论及应用

CAPM 跨期悖论：β 系数时变存在性理论研究

丁志国，苏 治，杜晓宇

[摘 要] 现有国内外关于β系数时变性研究，主要是利用市场数据进行实证检验和β系数时变估计方法的改进，并将β系数时变原因归结为宏观经济变量与公司微观因素的变化。我们着眼于跨期条件下β系数时变的存在性问题，基于共同期望等基本理论假设，运用金融学无套利分析方法和现代数理方法，推导CAPM跨期悖论，从理论上证明了β系数跨期时变的存在性，是对资本资产定价理论的进一步演绎和一个尝试性补充。

[关键词] CAPM；β系数；跨期；时变性；套利均衡

[基金项目] 国家社会科学基金项目（06CJL006）；国家自然科学基金项目（70573040）；教育部人文社会科学重点研究基地重大项目（05JJD790008）；中国博士后科学基金项目（20060390269）；吉林大学985经济分析与预测哲学社会科学创新基地项目（985CXJD015）

[收稿日期] 2007-01-19

[作者简介] 丁志国，1968年生，吉林大学商学院暨数量经济研究中心副教授，经济学博士，理论经济学博士后。（吉林 长春 130012）

一、问题的提出

资本资产定价模型（Capital Asset Pricing Model，CAPM）最早由Sharpe、Lintner、Mossin分别提出[1-3]，它用一个简单的模型刻画了资产收益与风险的关系，代表了金融学领域重要的进展和突破，是现代金融学最重要的理论基石之一。[4] CAPM的核心思想是在一个竞争均衡的资本市场中，非系统风险可以通过多元化加以消除，对期望收益产生影响的只能是无法分散的系统风险（用β系数度量），期望收益与β系数线性相关。Sharpe-Lintner的CAPM是单期的，本身并没有就β系数的跨期①性质做出具体要求。[5] 早期关于CAPM的实证检验，通常假定β系数跨期保持不变，并认为β系数具有外生性[6]，如BSJ检验[7]和FM检验[8]。Blume最早指出了β系数在跨期条件下具有时变性，使β系数稳定性研究成为现代金融学领域的一个重要命题。[9] 国内外大量

① 本文的“跨期”（Intertemporal）是指由当期向下一期转换的过程，而且这种转换在时间上是连续发生的。由于投资者在当前投资期所拥有的信息与在下一个投资期所拥有的信息并不相同，所以“跨期”也意味着投资者拥有信息的不断更新过程。需要强调的是，本文的“跨期”意味着投资在时间上连续发生，并不考察跨越投资期的具体长度，而是泛指投资决策时点的连续变化。

实证研究结果表明β系数是不稳定的，其研究内容主要是利用市场数据对β系数时变性特征进行实证检验和β系数估计方法的改进，并将β系数的时变原因归结为宏观经济变量与公司微观因素的变化，这些研究关注的是实证检验结果和数理方法改进，缺少跨期条件下β系数时变存在性的理论证明。其中，Blume、Brenner 和 Smidt 曾经讨论过β系数的跨期结构问题，但给出的只是一个经验模型，并不是从金融学理论出发的；[5,10]而 Merton 建立的跨期资本资产定价模型（ICAPM）[11]和 Breeden 建立的消费资本资产定价模型（CCAPM）[12]，虽然考虑了跨期问题，但并未涉及β系数的时变性特征[13]，后续的研究更是集中在β系数的时变估计方法方面。

与以往研究不同，本文基于经典资本资产定价理论框架和前提假设，运用金融学无套利分析方法和现代数理方法，推导 CAPM 跨期悖论，从一个全新的理论角度证明了β系数跨期时变的存在性，这是对资本资产定价理论的进一步演绎和一个尝试性补充。

二、CAPM 跨期悖论

本文在接受单期 CAPM 理论前提假设的条件基础上，引入跨期条件，并假设β系数在跨期条件下保持不变，推导 CAPM 跨期悖论，从理论上证明跨期β系数时变的存在性。

CAPM 成立的前提之一是：假设证券市场是（信息）有效的，即证券价格总是可以充分反映所有可以获得的信息，证券价格对信息的反映是及时、准确的，所有的市场参与者都能同等地得到充分的同质投资信息。市场有效的必要条件是资产价格的变化是随机和无法预测的。在接受市场弱式有效的条件下，可以假设市场价格变化满足独立同分布增量过程，即满足随机游动 I 假设，简称 RW I①，即：

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim IID(0,\sigma^2) \tag{1}$$

其中：μ是价格变化的期望漂移项，$\varepsilon_t \sim IID$（0，σ^2）表示ε_t服从独立同分布的随机过程，具有零均值和方差σ^2。对于增量过程$\varepsilon_t \sim IID$（0，σ^2）的分布而言，最为常见的假设就是假设服从正态分布，即$\varepsilon_t \sim IID\ N$（$0$，$\sigma^2$）。虽然如此假设对于运算来说比较简单，但是资产收益的正态假设却不是一个十分准确的假设，例如对于有限负债约束而言，如果P_t的条件分布是正态分布，则事件$\{P_t<0\}$总是对应着一个正的概率，这是不合理的。在接受 CAPM 市场有效的前提假设下，由于本文讨论的跨期收益是可无限细分的连续复合收益且为了满足有限负债约束，可以假设市场组合的价格的自然对数序列$p_{M,t}=\ln$（$P_{M,t}$）满足具有正态分布增量过程的随机游动假设②，因此有：

$$p_{M,t} = \mu_M + p_{M,t-1} + \varepsilon_{M,t} \qquad \varepsilon_{M,t} \sim IID\ N(0,\sigma_M^2) \tag{2}$$

用$R_{M,t}$表示市场组合的连续复合收益率，则：

$$R_{M,t} = \ln(P_{M,t}) - \ln(P_{M,t-1}) = p_{M,t} - p_{M,t-1} = \mu_M + \varepsilon_{M,t} \tag{3}$$

说明市场组合的连续复合收益是独立同分布的正态变量，其均值为μ_M，方差为σ_M^2。这时便产生了对数正态模型，可以表示为：

$$R_{M,t} = \mu_M + \varepsilon_{M,t} \qquad \varepsilon_{M,t} \sim IID\ N(0,\sigma_M^2) \tag{4}$$

由上式可知：跨期市场组合M的均值和方差分别为常数：

$$E(R_{Mt}) = \mu_M \tag{5}$$

$$D(R_{Mt}) = \sigma_M^2 \tag{6}$$

① RW I 是检验市场弱式有效的必要条件之一，参见文献［14］。

② 将市场组合价格取对数差分计算取得的连续复合收益率符合本文讨论的“跨期”的含义。

不失一般性，以下考虑市场中有两种风险资产 A 和 B 的情况，首先证明在满足上述假设条件时，两种证券收益率之间的相关系数 $\rho_{R_AR_B}$ 为常数。

命题 *1*：假设市场中存在风险资产 A 和 B，接受单期 CAPM 所有理论前提假设，并假设 β 系数在跨期条件下保持不变，则在跨期条件下这两种证券收益率之间的相关系数 $\rho_{R_AR_B}$ 为常数，即 $\rho_{R_AR_B}=C$，$-1\leqslant C\leqslant 1$。

证明：

经典的资本资产定价模型（CAPM）为：

$$E(R_i) = R_f + \beta_i[E(R_M) - R_f] \tag{7}$$

其中：$i=1, 2, \cdots, n$ 表示 n 种证券；$E(R_i)$ 与 $E(R_M)$ 分别表示风险资产 i 和市场资产组合 M 的期望收益率；$\beta_i=\mathrm{cov}(R_i, R_M)/\mathrm{var}(R_M)$ 为证券 i 的 β 系数。Gibbons 将 CAPM 理论模型转换为实证形式[15]，假设资产收益率是一个公平博弈，即已经实现的平均收益率等于预期收益率，满足风险中性假设，其表达式如下：

$$R_i = E(R_i) + \beta_i\delta_M + \varepsilon_i \tag{8}$$

其中：$\delta_M=R_M-E(R_M)$，ε_i 为随机误差项，且 $E(\varepsilon_i)=0$，$\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$，$i\neq j$，$(i, j=1, 2, \cdots, n)$。将（8）式代入（7）式，得到的 CAPM 实证形式：

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i(R_M - R_f) + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim IID\ N(0,\sigma_i^2) \tag{9}$$

则对于风险资产 A 和 B 满足 CAPM 的实证形式为：

$$R_A = R_f + \beta_A(R_M - R_f) + \varepsilon_A \qquad \varepsilon_A \sim IID\ N(0,\sigma_{\varepsilon_A}^2) \tag{10}$$

$$R_B = R_f + \beta_B(R_M - R_f) + \varepsilon_B \qquad \varepsilon_B \sim IID\ N(0,\sigma_{\varepsilon_B}^2) \tag{11}$$

其中：R_M，ε_A，ε_B 相互独立，则 A 和 B 之间的协方差为：

$$\mathrm{cov}(R_A,R_B) = \mathrm{cov}(R_f,R_B) + \mathrm{cov}(\beta_A(R_M - R_f),R_B) + \mathrm{cov}(\varepsilon_A,R_B) \tag{12}$$

假设跨期条件下无风险利率 R_f 保持不变，则有 $\mathrm{cov}(R_f, R_B)=0$，那么：

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\beta_A(R_M - R_f),R_B) &= \mathrm{cov}(\beta_A(R_M - R_f),R_f + \beta_B(R_M - R_f) + \varepsilon_B)\\ &= \beta_A\beta_B\mathrm{cov}(R_M - R_f,R_M - R_f)\\ &= \beta_A\beta_B\sigma_M^2\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\varepsilon_A,R_B) &= \mathrm{cov}(\varepsilon_A,R_f + \beta_B(R_M - R_f) + \varepsilon_B)\\ &= \mathrm{cov}(\varepsilon_A,\beta_B(R_M - R_f)) + \mathrm{cov}(\varepsilon_A,R_f) + \mathrm{cov}(\varepsilon_A,\varepsilon_B)\\ &= 0\end{aligned} \tag{14}$$

将（13）式和（14）式代入（12）式中可得 A 和 B 之间的协方差为：

$$\mathrm{cov}(R_A,R_B) = \beta_A\beta_B\sigma_M^2 \tag{15}$$

A 和 B 各自的方差分别为：

$$\mathrm{var}(R_A) = \mathrm{var}(R_f + \beta_A(R_M - R_f) + \varepsilon_A) = \mathrm{var}(\beta_A(R_M - R_f) + \varepsilon_A) \tag{16}$$

$$\mathrm{var}(R_B) = \mathrm{var}(R_f + \beta_B(R_M - R_f) + \varepsilon_B) = \mathrm{var}(\beta_B(R_M - R_f) + \varepsilon_B) \tag{17}$$

在 R_M，ε_A，ε_B 相互独立的条件下：

$$\mathrm{var}(R_A) = \mathrm{var}(\beta_A(R_M - R_f)) + \mathrm{var}(\varepsilon_A) = \beta_A^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_A}^2 \tag{18}$$

$$\mathrm{var}(R_B) = \mathrm{var}(\beta_B(R_M - R_f)) + \mathrm{var}(\varepsilon_B) = \beta_B^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_B}^2 \tag{19}$$

根据相关系数的定义，A 和 B 之间的相关系数为：

$$\rho_{R_AR_B} = \frac{\mathrm{cov}(R_A,R_B)}{\sqrt{\mathrm{var}(R_A)}\ \sqrt{\mathrm{var}(R_B)}} \tag{20}$$

将（15）、（18）和（19）代入（20）中，可得：

$$\rho_{R_A R_B} = \frac{\beta_A \beta_B \sigma_M^2}{\sqrt{\beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_A}^2}\ \sqrt{\beta_B^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_B}^2}} \tag{21}$$

由于β_A，β_B，σ_m^2，$\sigma_{\varepsilon_A}^2$，$\sigma_{\varepsilon_B}^2$均为常数，所以：

$$\rho_{R_A R_B} = C \tag{22}$$

其中：C 是常数，且满足 $-1 \leqslant C \leqslant 1$。

命题 *1* 得证，即满足上述条件的两个证券收益率之间的相关系数为常数。

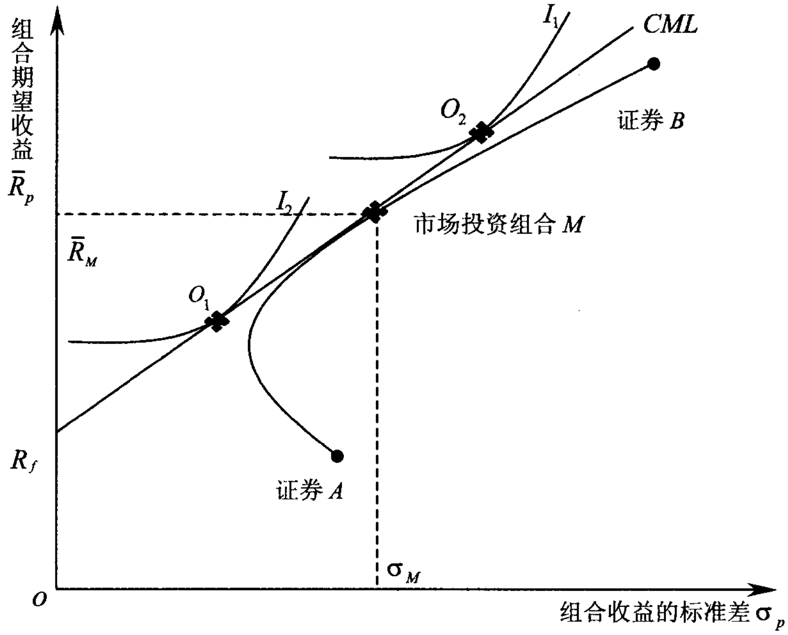

图 *1* 基金分离定理

由 CAPM 推导过程可知，证券组合有效边界的形状只取决于证券之间的相关系数，根据命题 *1*，如果跨期条件下所有证券的 β 系数都保持不变，那么它们之间的相关系数也不变，这进而决定了证券组合的有效边界在跨期条件下是一条固定的曲线①。简言之，假设跨期 β 系数不变等于假设有效边界跨期固定，另外，根据基金分离定理（如图 *1*）②，在均衡状态下，每种风险资产在均衡点 M 处的投资组合中都有一个非零的比例，且该组合中各资产的构成比例等于市场组合（Market Portfolio）中各种资产的构成比例，此比例为市场中所有资产的相对市值。在假设 β 系数跨期不变的前提下，有效边界固定和市场组合资产比例构成原则，是推导出 CAPM 跨期悖论的重要基础。

命题 *2*（CAPM 跨期悖论）：在接受 CAPM 前提假设的条件下，如果市场中所有证券 β 系数及其发行在外的股份在跨期条件下保持不变，则 CAPM 成立必须要求所有风险资产的 β 系数相等且为 *1*，即等于市场组合的 β 系数。这与 CAPM 理论前提假设完全相悖，在跨期条件下 β 系数必然

---

① 这里的固定有两层含义：第一，有效边界的形状保持不变；第二，有效边界在期望收益—风险坐标系中的位置保持不变。

② 基金分离定理说明：投资者对风险和收益的偏好状况与该投资者风险资产组合的最优构成无关。在图 1 中，I_1 和 I_2 分别代表了风险厌恶程度不同的投资者的无差异曲线，基金分离定理说明虽然 O_1 和 O_2 的位置不同，但是它们都是由无风险资产 R_f 和相同的风险资产组合 M 构成，因此所有投资者风险资产组合中各种风险资产的构成比例自然相同。

具有时变性特征。

证明：

假定时刻 t 两种证券的价格分别是 p_{At} 和 p_{Bt}，它们发行在外的股份分别是 ν_A 和 ν_B 且为常数，根据基金分离定理和市场组合资产比例构成原则，在时刻 t 最优投资组合 M_t 构成中，A 和 B 这两种证券的权重分别可以表示为：

$$w_{At} = (\nu_A p_{At})/(\nu_A p_{At} + \nu_B p_{Bt}) \tag{23}$$

$$w_{Bt} = (\nu_B p_{Bt})/(\nu_A p_{At} + \nu_B p_{Bt}) \tag{24}$$

假设两种证券的 β 系数分别为常数 β_A 和 β_B。在 CAPM 成立且 β 系数是常数的条件下，两种证券的期望收益为：

$$E(R_{At+1}) = R_f + \beta_A(E(R_{Mt}) - R_f) \tag{25}$$

$$E(R_{Bt+1}) = R_f + \beta_B(E(R_{Mt}) - R_f) \tag{26}$$

则 $t+1$ 时刻两种证券的期望价格分别为：

$$p_{At}[1 + E(R_{At+1})] = p_{At}R_f + p_{At}\beta_A[E(R_{Mt}) - R_f] + p_{At} \tag{27}$$

$$p_{Bt}[1 + E(R_{Bt+1})] = p_{Bt}R_f + p_{Bt}\beta_B[E(R_{Mt}) - R_f] + p_{Bt} \tag{28}$$

那么，时刻 $t+1$ 两种证券在市场组合中的权重分别为：

$$\begin{aligned} w_{At+1} &= \frac{\nu_A p_{At+1}}{\nu_A p_{At+1} + \nu_B p_{Bt+1}} \\ &= \frac{p_{At}\nu_A\{R_f + \beta_A[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\}}{p_{At}\nu_A\{R_f + \beta_A[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\} + p_{Bt}\nu_B\{R_f + \beta_B[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\}} \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} w_{Bt+1} &= \frac{\nu_B p_{Bt+1}}{\nu_A p_{At+1} + \nu_B p_{Bt+1}} \\ &= \frac{p_{Bt}\nu_B\{R_f + \beta_B[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\}}{p_{At}\nu_A\{R_f + \beta_A[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\} + p_{Bt}\nu_B\{R_f + \beta_B[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\}} \end{aligned} \tag{30}$$

不妨设 $\beta_A > \beta_B$，则 $w_{At+1} > w_{At}$ 和 $w_{Bt+1} < w_{Bt}$，可知市场组合 M_t 的位置将向证券 A 方向移动到 M_{t+1}，如 2 图示。由于新组合 M_{t+1} 并不在 CML 线上，即不满足 CAPM 的要求，那么所有理性投资者会在共同期望的作用下，卖出证券 A 同时买入证券 B，改变投资组合中两种证券的权重，以保证投资组合的最优化，其结果则是证券 A 的价格下跌和证券 B 的价格上升，直到投资组合重新回到均衡点 M_t，这导致 $t+1$ 时刻证券 A 和证券 B 的权重与 t 时刻相等，即：

$$w_{At} = w_{At+1} \tag{31}$$

$$w_{Bt} = w_{Bt+1} \tag{32}$$

即满足：

$$\frac{\nu_A p_{At}}{\nu_A p_{At} + \nu_B p_{Bt}} = \frac{p_{At}\nu_A\{R_f + \beta_A[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\}}{p_{At}\nu_A\{R_f + \beta_A[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\} + p_{Bt}\nu_B\{R_f + \beta_B[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\}}$$

$$\frac{\nu_B p_{Bt}}{\nu_A p_{At} + \nu_B p_{Bt}} = \frac{p_{Bt}\nu_B\{R_f + \beta_B[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\}}{p_{At}\nu_A\{R_f + \beta_A[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\} + p_{Bt}\nu_B\{R_f + \beta_B[E(R_{Mt}) - R_f] + 1\}}$$

对上面方程求解，可知：

$$\beta_A = \beta_B \tag{33}$$

当 $\beta_A < \beta_B$ 时，可以得出相同的结论。另外，由 CAPM 的推导过程可以知道上述结论将在多种资产组合的情况下仍然有效。又由市场组合 β 系数的定义知：

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i = 1 \tag{34}$$

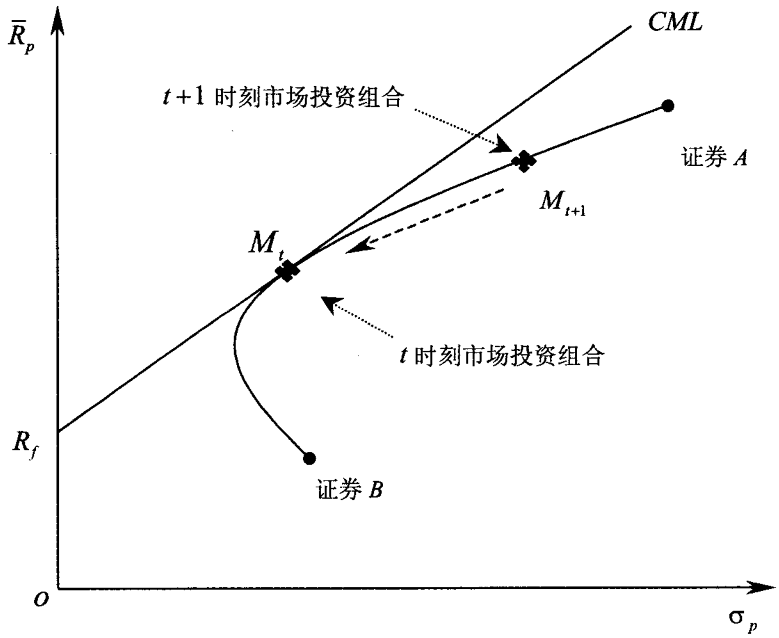

图 2　CAPM 跨期悖论

因此，要同时满足（33）和（34）式的关系，市场中所有风险资产的 β 系数必须满足：

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_N = \beta_M = 1 \tag{35}$$

也就是说，如果要使 β 系数在跨期条件下保持不变，则必须满足所有风险资产的 β 系数相等，且等于市场组合的 β 系数 *1*，这是一个与 CAPM 理论前提假设完全相悖的结论。由此可以得到在跨期条件下 β 系数不变的假设不成立。即在跨期条件下，β 系数必然具有时变性特征。命题 *2* 得证，CAPM 跨期悖论成立，β 系数在跨期条件下必然时变。

三、简短的结论

本文以金融学基础理论命题 β 系数的时变性作为研究对象，在归纳总结国内外关于 β 系数时变性研究的基础上，采用理论推导的研究方法，提出 CAPM 跨期悖论，从理论上证明了 β 系数时变的存在性。得到以下结论：

1. 国内外已有关于 β 系数时变性的研究主要是利用市场数据对 β 系数时变性特征进行实证检验和 β 系数估计方法的改进，关注的是实证检验结果和数理方法改进，缺少跨期条件下 β 系数时变存在性的理论证明。

2. 在接受 Sharpe-Lintner CAPM 理论前提的基础上，假设市场中所有证券 β 系数及其发行在外的股份在跨期条件下保持不变，运用金融学无套利分析方法，基于投资者共同期望，可以推导出 CAPM 跨期悖论。CAPM 跨期悖论表明：如果证券 β 系数跨期不变且 CAPM 成立，则必须要求所有证券的 β 系数相等且为 *1*，即等于市场组合的 β 系数，这与 CAPM 理论前提完全相悖。

CAPM 跨期悖论从理论上证明了 β 系数时变的存在性。本文研究是对资本资产定价理论的进一步演绎和一个尝试性补充。

[参考文献]

[1] SHARPE W. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk [J]. Journal of Finance, 1964, 19: 425 -442.

[2] LINTNER J. The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets [J]. Review of Economics and Statistics, 1965, 47: 13 -37.

[3] MOSSIN J. Equilibrium in a capital asset market [J]. Econometrica, 1966, 34: 768 -783.

[4] ROSS S. The arbitrage theory of capital asset pricing [J]. Journal of Economic Theory, 1976, 13: 341 -360.

[5] BLUME M E. Betas and the regression tendencies [J]. Journal of Finance, 1975, 30 (3): 785 -795.

[6] ENGLE R F, HENDRY D F. Testing super exogeneity and invariance in regression models [J]. Journal of Econometrics, 1993, 56: 119 -139.

[7] BLACK F, JENSEN, SCHOLES. The capital asset pricing model: some empirical tests [M]. //JENSEN M. Studies in the theory of capital markets. New York: Praeger, 1972.

[8] FAMA E, MACBETH J D. Risk, return and equilibrium: empirical tests [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 607 -636.

[9] BLUME M E. On the assessment of risk [J]. Journal of Finance, 1971, 26 (4): 275 -288.

[10] BRENNER M, SMIDT S. A simple model of non-stationary of systematic risk [J]. Journal of Finance, 1977, 32: 1081 -1092.

[11] MERTON R. An intertemporal capital asset pricing model [J]. Econometrica, 1973, 41: 867 -887.

[12] BREEDEN D. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunity [J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7: 265 -296.

[13] JAGANNATHAN R, WANG Z. Empirical evaluation of asset-pricing models: a comparison of the SDF and Beta Models [J]. Journal of Finance, 2002, 57: 2337 -2367.

[14] CAMPBELL J, LO A W, MACKINLAY A. Econometrics of financial markets [M]. Princeton: Princeton University Press, 1997.

[15] GIBBONS M. Multivariate tests of financial models? a new approach [J]. Journal of Financial Economics, 1982, 10: 3 -28.

[责任编辑：赵东奎]