一种基于三叉树的利率期限结构模型

田 萍[a],张屹山[a,b]
(吉林大学 a.商学院;b.数量经济研究中心,长春 130012)

摘 要:文章根据利率市场运动情况以及三叉树模型的特点,给出了一种以路径形式表现的右连左极的利率期限结构模型,简要绍了这种利率期限结构模型的性质,并对这种模型与以随机微分方程形式表现的利率期限结构模型进行了简单的对比。

关键词:利率期限结构模型;随机利率模型;三叉树模型
中图分类号:F224 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-6487(2011)17-0026-04

0 引言

利率期限结构理论是长期以来经济和金融领域重点研究的问题之一。利率期限结构会影响到全球的资本流动和汇率变换,会影响到人们的消费储蓄行为及金融衍生产品的价格,利率期限结构又是货币转换的重要途径。因此对利率期限结构的研究是任何一个国家经济和金融领域的首要问题。随着金融市场不确定性活动的加剧,利率的不稳定性也逐渐加强,这使得传统的利率期限结构理论不能很好地描述利率变化的复杂性,从而不足以满足对当今市场研究的需要。因此研究以随机结构描述的利率形式为主体的现代利率期限结构模型理论及其应用,早已成为西方发达国家的重要课题。

无论从我国金融市场市场化、国际化的角度出发,还是应对我国国内经济形势的需要出发,构建我国合理、合适的金融市场利率期限结构模型形式也已经是国内众多学者和金融从业人士的主要研究目标。

1 问题的提出

随着金融市场不确定性情况的加剧,以随机模型表现市场上各种资产价格,从而研究和解决各种金融问题已经成为目前金融市场研究的主要手段。国际上关于利率期限结构的理论依照时间顺序,先后形成了传统利率期限结构理论和现代利率期限结构理论这两大理论体系。以纯预期理论、流

基金项目:中国博士后特比资助项目(201003538);吉林大学基本科研业务费资助项目

企业销售收入在条件分布的不同位置而发生变动,呈现出一定的变化趋势。从结果看,专利申请量的系数在所考察分位点的值随着条件分布由低端向高端变动时,系数逐渐开始增大。如在0.1低分位点处系数值为0.4195,在0.5分位点处为0.4341,而在0.9分位点处为0.4538。其经济意义为:当企业销售收入的条件分布位于0.9分位点处时,专利申请量的促进作用最为显著;而在其他分位点水平上,专利申请量的促进作用则相对较弱。在不同分位点位置上,专利申请数量的影响表现出一定的变化规律,这是最小二乘回归模型所无法反映的信息。此外,在同一情形下做回归分析,显然分位数回归分析结果更加稳健,各系数显著性更强。因而,面板数据模型的分位数回归估计在实际应用中可以发挥重要作用。

4 结论

本文在对分位数回归方法的基本原理进行全面分析说明的基础上,对其在面板数据模型中的应用作了深入分析,并对不同回归估计方法在面板数据模型中的估计效果进行了比较分析。结果表明,在对变量之间的关系进行分析时,面板数据模型的分位数回归除了可以测度自变量对因变量的某个特定分位数的边际效果外,还可以使各参数估计量显著程度更高,回归分析结果更加稳定和精确。

参考文献:

[1]Koenker, Bassett. Regression Quantiles[J]. Econometrica, 1978, (46).
[2]Bassett , Koenker. Strong Consistency of Regression Quantiles and Related Empirical Processes[J]. Econometric Theory , 1986, (2).
[3]Powell , James L. Censored Regression Quantiles[J].Journal of Econometrics, 1986, (32).
[4]Hong H , Chernozhukov V. Three-Step Censored Quantile Regression and Extramarital Affairs[J] . Journal of the American Statistical Association, 2002, (97).

(责任编辑/亦 民)

动性偏好理论、市场分割理论等几种"假说"理论为基础的传统利率期限结构理论由于发展较早，且模型形式相对并不复杂已经发展得比较完善。

进入20世纪70年代以后，为了应对世界金融市场不稳定的局面，能更多地体现近、现代金融市场特点的以随机利率为主的现代利率期限结构理论产生了，并且得到了迅猛的发展。关于随机利率的模型最早可追溯到1971年Merton的论文，1977年该模型首先被Vasicek应用，因此该模型被称为Vasicek模型；以后的若干年里经典的CIR模型、Ho-Lee模型、HJM模型以及Hull-White模型等相继出现。

目前，在金融研究中被认可且经常被人们使用的瞬时短期利率模型有两种形式，一种是假设瞬短期期利率恒为常数 r，而另一种假设瞬时短期利率是随机波动的，其运行轨迹通常满足如下的随机微分方程或者它的扩展形式

$$dr(t)=h(t,r(t))dt+g(t,r(t))dw(t) \tag{1}$$

前一种假设也可以说是后一情况的一种特殊形式。这两种假设条件各有利弊：假设瞬时短期利率恒为常数形式简单、便于计算，但不符合客观实际和经济社会的复杂性；假设瞬时利率的运动满足随机波动方程相对于前者更符合现实，但由于这个运动方程是瞬时利率的微分形式，而在应用时通常要用到这个瞬时利率的积分的形式，这样经常遇到的困难之一是瞬时利率没有显示解，之二是关于该利率的积分形式过于复杂不利于计算。基于该种想法，我们考虑是否存在介于这两种假设形式之间的，能够直接表示短期瞬时利率形式的利率模型形式。

通过对现实市场的观察，可以获得更多的信息。以下是中、美两国存贷款利率调整数据的实际情况。

我们注意到存贷款利率的一些变动规律：

(1)利率的调整主要应该是受到一些如宏观因素等原因的影响引起的；

(2)利率的每一次调整完成之后，都会在一个状态（数值）下稳定一段时间；

(3)即便在经济明显"变好"或"变坏"的时间段里，政府为了市场的平稳过渡，也是按照相对比较平缓的步骤和程度逐渐升息或降息，而不能大踏步的"一步到位"。

不仅对于存贷款利率，对于如拆借利率、债券利率等也都是有相应的稳定时间的。事实上对于商业拆借行为或者是套期保值行为，相应的利率一般也都是有一定的持续性的。这说明除了在市场中为了投机等目的而作短期交易的交易者之外，利率的瞬时波动情况一般在商业行为中并不被特别的重视。以规避风险为目的的商业行为者更关注在经历了一段时间之后的利率的变化情况。因此，市场的实际情况确实支持我们去寻找一个新的模型，其既能体现利率的变化，而又能让该利率在现实中以某个固定的值保持一段时间的稳定性。根据市场的客观事实，结合三叉树模型的特点，我们可以建立一个右连左极的随机利率模型。

2 基本假设与模型介绍

为了便于模型的引入，我们需要对市场和利率做一些简单的假设。

假设1 利率市场是连续带跳的，但是利率如果发生改变也总是在等时间间隔的固定时点上，初始时刻为 t_0，接下来可能发生改变的时点依次为 $t_1, t_2, t_3\cdots$。

这样利率从一个时刻的状态出发，将会至少维持这一状态一个时间段，当到达下一个时间点时，利率会根据市场的实际情况选择改变或者是继续保持不变。利率发生改变的时间间隔可以根据市场的实际情况进行调解。

假设2 在市场中会对利率有影响的因素所产生的结果会有三种情况，分别是市场经济过热、市场经济过冷、市场继续稳定。相应的这三种结果我们可以用状态变量 Z 加以表示。当市场处于稳定状态时取值0，当市场经济处于过热状态时取值1，反之，当市场经济处于过冷状态时取值-1。无疑的，在市场中会对利率有影响的因素有很多，但我们只考虑这些影响的综合作用结果。

假设3 对于利率，首先考虑在稳定的状态下，瞬时点利率在初始时刻为 r_0，在任意时点 t_k 时的利率为 r_{t_k}，那么假设利率在 t_{k+1} 时刻的值受到状态变量变量 $Z_{t_{k+1}}$ 的影响，根据假设2这个状态变量可以表示市场的一种宏观经济指数，当市场处于稳定状态时取值0，当市场经济处于过热状态时取值1；反之，当市场经济处于萧条状态时取值-1。对于利率而言，如果市场处于平稳状态利率不变，如果市场处于过热状态，利率上调 δ 个百分点；反之如果市场处于萧条状态利率下调 δ 个百分点。模型形式为

$$r_{k+1}=r_k+\delta Zr_k=r_k(1+\delta Z)=\begin{cases} r_k(1+\delta) & \text{市场过热} \\ r_k & \text{市场平稳} \\ r_k(1-\delta) & \text{市场萧条} \end{cases}$$

$$(k=0,1,\cdots) \tag{2}$$

由于在任意时刻的下一时刻市场中这三种状态发生的可能性都有，但也只能有一种状态真实发生，这样我们可以用概率表示每种市场状态发生的可能性。又由于在初始时刻我们假设市场是稳态的，而人们总是希望这种稳态能够维持，并愿意为这种目的而努力，因此在它的下一时刻市场应该出现稳态的可能性最大。并且如果没有其他的信息，市场在下一刻进入过热状态或萧条状态的可能性应该是相同的。这样，我们给出如下的假设4。

假设4 在0时刻，以及在以后的任意一个 $r_{t_k}=r_0$ 的时刻，假设下一刻市场可能出现经济过热或萧条的状态的概率相同，并且这种概率小于市场继续保持平稳发生的概率。再来考虑如果市场确实出现了波动导致利率发生了变动不再等于初始的 r_0。事实上，这种变动是人们为了维持市场能够继续稳定而对利率做的相应调整。因此，在接下来的短期时间里人们希望市场是稳定的可能性大于发生过热或者萧条的可能性。这样我们给出下面这个最重要的假设。

假设5 市场利率无论在任何点，在下一时刻市场在这种状态下继续平稳的可能性都大于市场发生变化的可能性，

并且，市场经济转入过热或萧条状态的可能性相同。

我们假设市场在任意时刻维持前一时刻的平稳状态的概率为 p，转入过热或相对萧条状态的概率都为 q，这样有 $p+2q=1$。在实际操作时，可以根据市场的情况设定或估计分布的真实概率 p 和 q，p 和 q 不同，市场也就不同。

假设初始时刻为状态0，利率总是在整数点发生变化对应的模型为如图1。

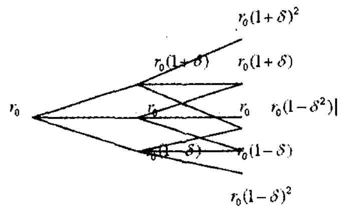

图1 类似三叉树模型的的利率分裂轨迹q

注意到，在 $k=0$ 时，$r_{t_0}=r_0$，在 $k=1$ 时

$$r_{t_1}=\begin{cases} r_{t_0}(1+\delta) & q \\ r_{t_0} & p \\ r_{t_0}(1-\delta) & q \end{cases}$$

在 $k=2$ 时

$$r_{t_2}=\begin{cases} r_{t_1}(1+\delta) & q \\ r_{t_1} & p \\ r_{t_1}(1-\delta) & q \end{cases}=\begin{cases} r_0(1+\delta)^2 q^2 \\ r_0(1+\delta)2qp \\ r_0 p^2 \\ r_0(1+\delta)(1-\delta)\,2\,q^2 \\ r_0(1-\delta)\,2qp \\ r_0(1-\delta)^2 q^2 \end{cases}$$

这样，我们可以给出 $t=k$ 时

$r_{t_k}=r_0 1^i(1+\delta)^j(1-\delta)^{k-i-j}(i=0,1,\cdots k;j=0,1\cdots,,k-i)$ 且该事件发生的概率为 $C_k^i C_{k-i}^j p^i q^{k-i}$（$k=1,2,\cdots$）。

为了表示简单，我们对如上的分布给出简化表示方法，记 $r_{t_k}^{i,j}=r_0 1^i(1+\delta)^j(1-\delta)^{k-i-j}$ $(i=0,1,\cdots k;j=0,1\cdots,[k-i])$ 则可以给出如下的定义。

定义1　从平稳状态 r_0 出发的瞬时点利率服期限结构服从如下的分布形式：在任意时间 $t=k$ 时瞬时点利率 r_{t_k} 的分布形式为

$$P(r_{t_k}=r_{t_k}^{i,j})=C_k^i C_{k-i}^j p^i q^{k-i}\quad i=0,1,\cdots k,j=0,1\cdots,k-i \tag{3}$$

其中 $r_{t_k}^{i,j}=r1^i(1+\delta)^j(1-\delta)^{k-i-j}$，概率 $0<p<1$，$0<q<1$ 满足 $p+2q=1$，且有 $\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}C_k^i C_{k-i}^j p^i q^{k-i}=1$。对于 $k<\forall t<k+1$，则有 $r_t=r_{t_k}$，这样我们得到了一个右连左极的随机利率期限机构模型。

事实上，满足如上定义1的利率期限结构模型是一种右连左极的离散利率过程，该过程仅在等间隔时间点 t_1，t_2，t_3 $\cdots$ 会发生利率的波动。到达时间点 t_k 前可能走的路径的个数是 $1\times 3^{K-1}$ 个，$k=1,2,3\cdots$。

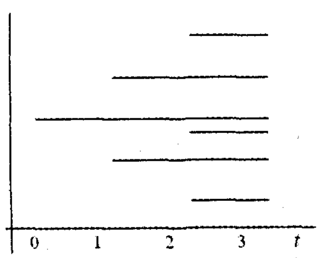

图2 满足定义的利率的可能路径集合

3 模型的性质

由于

$$\begin{aligned} r_{t_k}^{i,j}&=r_0 1^i(1+\delta)^j(1-\delta)^{k-i-j} \\ &=r_0\left(1+\sum\nolimits_{m=1}^{j}C_j^m\delta^m\right)\left(1-\sum\nolimits_{n=1}^{k-i-j}C_{k-i-j}^n\delta^n\right) \\ &=r_0+r_0\left(\sum\nolimits_{m=1}^{j}C_j^m\delta^m-\sum\nolimits_{n=1}^{k-i-j}C_{k-i-j}^n\delta^n\right)-r\left(\sum\nolimits_{m=1}^{j}C_j^m\delta^m\right) \\ &\quad\left(\sum\nolimits_{n=1}^{k-i-j}C_{k-i-j}^n\delta^n\right) \end{aligned}$$

因此，我们可有如下的性质1：

性质1　服从定义1的模型是单次波动率 δ 的线性多项式函数。

另外，关于这个利率模还可以得到如下两个相对重要的性质。

性质2　服从定义1的利率过程，在 $t>0$ 的任何时刻的期望为 r_0，即 $Er_t=r_0\quad\forall t>0$。

证明：首先我们考虑对任意整数时刻 k 这个结论是正确的，即有 $Er_{t_k}=r_0\quad\forall$整数k。

按照期望的定义，对任意的整数 k 需要验证公式

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}r_k^{i,j}C_k^i C_{k-i}^j p^i q^{k-i}=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}r(1+\delta)^j(1-\delta)^{k-i-j}C_k^i C_{k-i}^j p^i q^{k-i}=r_0 \tag{4}$$

也就是证明 $\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}(1+\delta)^j(1-\delta)^{k-i-j}C_k^i C_{k-i}^j p^i q^{k-i}=1$，

根据

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}(1+\delta)^j(1-\delta)^{k-i-j}C_k^i C_{k-i}^j p^i q^{k-i} \\ &=\sum_{i=0}^{k}C_k^i p^i q^{k-i}\sum_{j=0}^{k-i}C_{k-i}^j(1+\delta)^j(1-\delta)^{k-i-j} \\ &=\sum_{i=0}^{k}C_k^i p^i q^{k-i}(1+\delta+1-\delta)^{k-i} \\ &=\sum_{i=0}^{k}C_k^i p^i(2q)^{k-i}=(p+2q)^k \end{aligned}$$

及本利率模型的基本假设和对概率 p、q 的定义有 $p+2q=1$，因此得证。

而对于 $k<\forall t<k+1$，根据假设，利率在两个整数区间以内将维持前一个整数时刻时的状态，这就有 $r_t=r_{t_k}$，而我们又刚刚证明 $Er_{t_k}=r_0$ 对$\forall$整数k，故有

$Er_t=Er_{t_{k-1}}=r_0\,(k<\forall t<k+1)$。

从而，有 $Er_t=Er_{t_{k-1}}=r_0\,(\forall t>0)$，这样我们完成了本性质的证明。

性质3　服从定义1的利率的方差为 $(p+2q+2q\delta^2)^k$，即

$$\mathrm{Var}(r_t)=(p+2q+2q\delta^2)^k。\tag{5}$$

证明过程类似于关于期望的证明。首先我们证明在节点处有这样的性质，对任意的整数 k 有

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(r_{t_k})&=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}(1+\delta)^{2j}(1-\delta)^{2(k-i-j)}C_k^i C_{k-i}^j p^i q^{k-i} \\ &=\sum_{i=0}^{k}C_k^i p^i q^{k-i}\sum_{j=0}^{k-i}C_{k-i}^j(1+\delta)^{2j}(1-\delta)^{2(k-i-j)} \\ &=\sum_{i=0}^{k}C_k^i p^i q^{k-i}\left[(1+\delta)^2+(1-\delta)^2\right]^{k-i} \end{aligned}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_k^i p^i[2q(1+\delta^2)]^{k-i}=[p+2q(1+\delta^2)]^k$$

然后，对于任意的 $k<\forall t<k+1$，由于模型的假设有 $r_t=r_{t_k}$，则有

$\mathrm{Var}(r_t)=\mathrm{Var}(r_{t_k})=(p+2q+2q\delta^2)^k$

这样，我们也完成了性质2的证明。

通过该利率模型的分布公式，以及性质2可以看出，随着时间的延长，市场相对于初始时刻的不稳定性增加，从而利率的波动性增大。而通过性质1可以看出利率市场的长期均衡点是初始时的 r_0。

4 与其他模型的比较

在现代与利率相关的金融问题研究中，主要被人们应用的或者是恒为常值的瞬时点利率 r，或者是服从运动形式为 $dr(t)=h(t,r(t))dt+g(t,r(t))dw(t)$ 的瞬时点利率。对于恒为常值的瞬时点利率 r，它也可以看成本文所考虑的模型的一种特殊形式，但相对而言利率模型(3)显然更现实一些。并且这一种利率的分布形式能够以多项式的形式表现，这使得在进行与金融衍生产品相关的定价中的可操作性增强了。

下面主要讨论本文的利率形式与服从公式(1)的瞬时点利率模型之间的对比。对于服从公式(1)的瞬时点利率模型由于它们表示的是瞬时点利率的微分形式，利用方程知识我们知道，并不是对于所有满足(1)的方程我们都可以获得它们的解的形式。并且，现实中在对利率的研究或者相关的金融衍生产品定价中所使用的多是瞬时点利率 r_t 的积分形式 $\int r_t dt$，这样，如果用方程(1)进行相关的计算，很难获得直接的显示结果，甚至有些连进行数值逼近都很困难。事实上，对于服从方程(1)的瞬时点利率模型，在目前多被人们应用的也是能够获得瞬时短期利率解形式的模型，如Ho-Lee模型，Vasicek模型等。以下我们通过对这两个模型的简单分析与本文的模型进行比较。

1. Ho-Lee(1986)模型的利率随机波动满足

$dr(t)=\Theta(t)dt+\sigma_r dw(t)$

特别地，当 $\Theta(t)=0$，$r(0)=r$ 时，上述模型将化为

$$\begin{cases}dr(t)=\sigma_r dw(t)\\ r(0)=r\end{cases}\tag{6}$$

方程(6)所体现的利率的瞬时运动只有扩散项 $\sigma dw(t)$ 而没有漂移项，这说明利率本身并没有稳定移动的趋势，而只有围绕某一固定的常值随机波动的行为，其初值为 r。由于这种利率模型有其一定的市场解释能力，可以给出该利率解形式为

$$r_H(t)=r(0)+\int_0^t\sigma_r dw(s)=r+\sigma_r w(t)\tag{7}$$

从而其在时刻 t 的均值和方差分别为

$Er(t)=r+E\sigma_r w(t)=r$

$\mathrm{Var}(r(t))=\mathrm{Var}(\sigma_r w(t))=\sigma_r^2 t$

(2)Vasicek(1976)模型的一般形式为

$$dr(t)=a(b-r(t))dt+\sigma_r dw(t)\tag{8}$$

其中 a,b 和 σ_r 均为非负的常数，积分变换后可得一Ornstein-Uhlenbeck过程

$$r(t)=r(0)e^{-at}+b(1-e^{-at})+\sigma_r e^{-at}\int_0^t e^{as}\mathrm{d}w(t)\tag{9}$$

则 $r(t)$ 仍旧服从正态分布，且有

$E(r(t))=r(0)e^{-at}+b(1-e^{-at})$

$\mathrm{Var}(r(t))=\frac{e^2}{2a}(1-e^{-2at})$

上式说明当参数都非0时，随着 $t\to\infty$，$r(t)$ 依概率收敛于均值是 b，方差是 $\frac{\sigma_r^2}{2a}$ 的正态分布。我们注意到当 $r(0)=b=r$，$a=1$ 时

$$r_V(t)=r+\sigma_r e^{-t}\int_0^t e^s\mathrm{d}w(s)\tag{10}$$

公式(7)与(10)分别是Ho-Lee模型和Vasicek模型解过程的简单形式，对于这两种模型我们注意到，它们与模型(3)的相同的地方是，均从常值出发，并且瞬时点利率是以该常值为中心进行波动的，也就是说它们都有均值回复的功能，并且随着时间的延长，利率的波动性都会增加。这样，满足定义1的利率模型基本上具有连续型随机利率模型所具有的优势。

不同的地方是，在未来任意一点 $t'\neq 0$，公式(7)与(10)中 $r(t')$ 都是一个连续型的随机变量，这样，$P(r(t')=r_0)=0$。这就是说，虽然在理论上随机利率过程 $r(t)$ 是围绕着固定值 r_0 运动的，但是在未来的任何时刻利率 $r(t)$ 真实的等于 r_0 的可能性都为0，或者说都不能真实的等于 r_0。这与在现实中无论是银行的存贷款利率，还是一定时间的债权利率甚至是隔夜拆借利率都会持续一段时间、甚至是反复的相同是相矛盾的。而模型(3)却能很好的表示这种客观现象。另外，用公式(7)或(10)表现的利率过程有取负值的可能性，这是这两个模型不符合实际的地方，也是它们的缺点之一，而以公式(3)表现的模型就不会出现这种情况。最后，公式(7)与(10)所考虑的模型仅是连续性随机利率模型中少数的能够获得显示解的模型，而本文考虑的利率模型直接表示了瞬时利率的路径形式，相对而言更直接、更现实。

5 几点说明

(1)本文的利率期限结构模型，是基于一个服从三项式分布的随机变量建立起来的。本文假设这个随机变量是现实中宏观经济等因素的函数。因此也就可以通过研究相关的这个随机变量去研究利率模型。

(2)本文假设影响利率的随机变量是服从保持原值的概率是 p，向上或向下的概率都为 q，且有 $p+2q=1$ 的分布的。基于这种假设是为了与本文提到的两种连续型的随机利率模型进行对比，以及在对未来无任何信息的情况下所做的假设。在现实中为了更符合实际情况也可以根据实证研究结果或者是某些先验信息更改这个随机变量的分布情况，比如向上或向下运动的概率不再相同等等。当然，更改

相关四格表数据资料检验方法的进展与应用

陆运清

（河北师范大学 教育学院，石家庄 050024）

摘 要：McNemar检验是两个相关二分变量差异显著性检验的常用方法，但其仅根据前后测试结果发生变化的部分得出检验结果，并未考虑前后测试结果一致部分对差异显著性的影响，因此，McNemar检验实际上是在部分样本基础上进行的检验。由于McNemar检验在相关教材中广泛存在，各领域研究者在统计应用中仍然选用。为了尽快使有关应用者了解修正公式，使各领域研究得出更准确的结果，文章对两个相关二分变量差异显著性检验进展结果作了介绍，并对近期一些文献中检验结果与修正结果进行了比较。

关键词：McNemar检验的修正；McNemar检验；相关二分变量

中图分类号：O212.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1002-6487(2011)17-0030-03

1 McNemar检验及其存在的问题

1.1 McNemar检验

两个相关二分变量的差异显著性检验在实际研究中经常涉及，最典型的是前后测实验设计研究。例如，在医学研究中，考查患者服用某种药物或接受某种处理前后是否出现某种症状，以研究该种药物或该种处理对此症状的治疗效果；在营销研究中，调查消费者在看到某产品广告前后购买该产品的情况，以确定该产品广告的效果；在教育研究中，测查学生在接受某教育过程前后某项素质的达标情况，以了解该教育过程的成效；等等。在前后测实验设计中(见表1)，a、d分别表示处理前后的测试结果均为“是”和均为“否”的被试数，二者所代表的被试，处理前后测试结果相同。b、c分别表示处理前后测试结果由“是”变为“否”和由“否”变为“是”的部分，二者所代表的被试，处理前后测试结果均发生

基金项目：河北师范大学自然科学基金资助项目(L2010Y16)

作者简介：陆运清(1965-)，女，河北藁城人，硕士，副教授，研究方向：心理教育统计与测量。

后模型的形式也许会更复杂一些。

(3)本文假设利率仅在等间隔的节点处可能会发生改变，而在其他时间会保持前面的状态不变。在进行相关的研究时，可以根据实际情况设定间隔的时间长度如1天、1周或者一个月等等。

(4)对于模型的设定，本文考虑的是在任何时点上利率的分布完全相同，事实上，还可以根据可得信息情况，对将来时刻的分布概率做进一步的改正或修正。相对于连续型的模型，这个特点也更加灵活。

(5)本文所考虑的模型是一个围绕固定常值波动的利率模型，它也可以扩展成带有平移项的利率模型。这样在模型的类型上，本文所考虑的形式基本上是可以与满足微分方程的连续型随机利率模型相对应的。当然，具体性质有待于进一步讨论。

参考文献：

[1]Black, F., Scholes, M.The Pricing of Options and Corporate Liabilites [J].Journal of Political Economy, 1973,(81).

[2]John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr. Stephen A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates[J]. Econometrica,1985,(53).

[3]Thomas S.Y. Ho, Sang-Bin Lee. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims[J].The Journal of Finance,1986,(41).

[4]David Heath, Robert Jarrow, Andrew Morton. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation[J].Econometrica,1992,(60).

[5]Black, F., Derman, E., Toy, W.ne-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options[J].Financial Analysts Journal, 1990,1.

[6]Dothan, M.On the Term Structure of Interest Rates[J].Journal of Finical Economics,1978,(6).

[7]Hull, J., White, A. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities[J].Journal of Finance, 1987,(42).

[8]Hull, J., White, A. Pricing Interest-Rate Derivative Securities[M].The Review of Financial Studies,1990,3.

[9]田萍，张屹山，赵世顺.随机利率下期权定价的探讨[J].数理统计与管理，2008，(6).

(责任编辑/亦 民)