

随机 Solow-Swan 模型的基本公式及相对稳定性^①

张屹山 田 萍

内容提要 本文是在确定的 Solow-Swan 模型基础上给出了随机的 Solow-Swan 模型。确定的 Solow-Swan 模型设劳动力水平和知识水平以常数增长率变化, 即是稳定增长的。这无疑是假定整个社会是均匀进步, 且不受任何偶然因素的随机影响。因此它只能用于一般的理论分析, 缺乏实用性。但这并不符合客观实际。这里将其动态演变过程随机化了。相对于确定的形式这种模型更有现实性。文中给出了随机意义下的一些基本方程, 并且论证了在随机的意义下经济可以相对稳定。最后利用相位图可以看出经济能够向相对平衡增长路径收敛。

关键词 Solow-Swan 模型 随机模型 相对稳定性

一、Solow-Swan 模型及具体含义

古典的 Solow-Swan 生产函数模型包含四个宏观经济变量: 产出 Y , 资本 K , 劳动力 L 和知识或劳动力的有效程度 A , 它们的函数关系为 $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$, 称 $A(t)L(t)$ 为有效劳动力, t 为时间量。关于此生产函数有三个性质, 第一个性质是各要素边际产出大于 0, 且递减, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} &> 0 & \frac{\partial^2 F(K, AL)}{\partial K^2} &< 0 \\ \frac{\partial F(K, AL)}{\partial AL} &> 0 & \frac{\partial^2 F(K, AL)}{\partial (AL)^2} &< 0 \end{aligned}$$

第二个性质是满足如下 Inada 条件

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} &= \lim_{AL \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, AL)}{\partial (AL)} = +\infty \\ \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} &= \lim_{AL \rightarrow +\infty} \frac{\partial F(K, AL)}{\partial (AL)} = 0 \end{aligned}$$

第三个性质是, 为满足规模效益递增则有 $F(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}, 1) = \frac{1}{A(t)L(t)} F(K(t), A(t)L(t))$, 其

^①教育部重大研究项目《宏观风险形成的微观机理: 数理模型、计量方法与智能模拟研究》成果之一。项目批准号: 02JAZJD790008。

中 $\frac{K(t)}{A(t)L(t)}$ 是单位有效劳动资本。定义

$$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}, \quad y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}, \quad f(k(t)) = F(k(t), 1)$$

则有 $y(t) = f(k(t))$ 。除此之外 Solow-Swan 模型还作了关于劳动力和知识水平以常数增长率变化的假设。即它们的动态演变过程如下:

$$dL(t) = nL(t)dt$$

$$dA(t) = gA(t)dt$$

资本存量的变化为:

$$K'(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

其中 δ 为资本的折旧系数, s 为储蓄率。最后可整理出资本的人均变化方程为:

$$k'(t) = sf(k(t)) - (g + \delta + n)k(t)$$

此即 Solow-Swan 模型基本的微分方程。当 $k'(t) = 0$ 时 $k(t) = k^*$, 系统处于稳定状态。

二、随机模型及基本公式

在以上的模型中主要设劳动力水平和知识水平以常数增长率变化, 即是稳定增长的。这无疑是假定整个社会是均匀进步, 且不受任何偶然因素的随机影响, 特别是对产出的影响, 但这并不符合客观实际。它只能用于一般的理论分析, 缺乏实用性。故这里我们把它们的动态演变过程随机化

$$dL(t) = nL(t)dt + hL(t)dw(t)$$

$$dA(t) = gA(t)dt + qA(t)dw(t) \quad (1)$$

式 (1) 表示劳动力及技术水平的瞬时变动均由漂移项和扩散项两项组成。其主体假设仍为 Solow-Swan 的常数增长率, 只不过增添了随机波动的能力。但波动率的期望为 0。当然为了保证式 (1) 有意义还需验证或假设对任意的时间 $T > 0$ 有 $E \int_0^T L^2(t) dt < +\infty$,

$$E \int_0^T A^2(t) dt < +\infty。$$

(1) 式积分的形式如下:

$$L(t) - L(0) = \int_0^t nL(s)ds + \int_0^t hL(s)dw(s)$$

$$A(t) - A(0) = \int_0^t gA(s)ds + \int_0^t qA(s)dw(s)$$

其中 $w(t)$ 为标准布朗 (Brown) 运动, 在小的时间间隔 Δt 上 $w(t)$ 满足 $\Delta w(t) = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, 当取极限即令 Δt 趋于 0 时有 $dw(t) = \varepsilon \sqrt{dt}$, ε 服从标准正态分布 h 和 q 分别表示政策、突发事件等偶然因素对劳动力、技术水平的影响。它也可以是时间 t 及 $w(t)$ 的函数, 为简单计先设其为常数。其符号主要看综合影响指标对被考察因素的利弊。由于这样的影响并非主流且又有相互抵消的可能, 故我们认为其影响的期望为 0, 即扩散项的期望为 0。对任意的 $t > 0$ 有:

$$E \int_0^t hL(s)dw(s) = 0$$

$$E \int_0^t qA(s)dw(s) = 0$$

为了便于后面的计算我们对(1)式变形得:

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{L(t)} &= ndt + hdw(t) \\ \frac{dA(t)}{A(t)} &= gdt + qdw(t)\end{aligned}\quad (2)$$

式(1)是以增长率的形式表示的。可以解释为劳动力及技术水平的瞬时增长率分别为平稳项 ndt 和 gdt 与波动项 $hdw(t)$ 和 $qdw(t)$ 。其波动项的期望为 0。即

$$Ehdw(t) = 0$$

$$Eqdw(t) = 0$$

这样我们在劳动力及技术水平稳定增长的 Solow-Swan 假设之下进行了扩展。资本存量变化方程仍为:

$$dK(t) = sY(t)dt - \delta K(t)dt \quad (3)$$

稳定状态应是一种均衡状态, 在稳定状态人均资本维持在固定的均衡水平不变, 人均产量也不变。显然要一动态变量在各种不确定因素的影响下始终处于一个值点是不可能的。但若影响这一变量的主要因素不变, 另一些次要的因素是随机变化的, 则我们可以认为这一动态变量的值是波动的但相对稳定的, 即其期望为常数。由此我们认为相对稳定的定义是有意义的。需注意的是在以后讨论相对稳定性时, 应对随机的 Solow-Swan 模型的期望作与非随机情形相对应的一些假设。

命题1 随机意义下人均资本的变化方程为:

$$\begin{aligned}dk(t) &= sf(k(t))dt - (\delta + g + n)k(t)dt + (h^2 + q^2 + hq)k(t)dt \\ &\quad + (h + q)k(t)dw(t)\end{aligned}\quad (4)$$

其中

$$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$$

证明:

利用式(1)及 ITO 公式有:

$$\begin{aligned}dA(t)L(t) &= A(t)dL(t) + L(t)dA(t) + d\langle A(t), L(t) \rangle \\ &= A(t)(nL(t)dt + hL(t)dw(t)) + L(t)(gA(t)dt + qA(t)dw(t)) \\ &\quad + hqA(t)L(t)dt \\ &= (hq + n + g)A(t)L(t)dt + (h + q)A(t)L(t)dw(t) \\ d\frac{1}{A(t)L(t)} &= -\frac{1}{A^2(t)L^2(t)}[(hq + n + g)A(t)L(t)dt + (h + q)A(t)L(t)dw(t)] \\ &\quad + \frac{1}{A^3(t)L^3(t)}(h + q)^2 A^2(t)L^2(t)dt \\ &= \frac{h^2 + q^2 + hq - n - g}{A(t)L(t)}dt + \frac{h + q}{A(t)L(t)}dw(t)\end{aligned}$$

则

$$d\frac{K(t)}{A(t)L(t)} = s\frac{Y(t)}{A(t)L(t)}dt - (\delta + n + g)k(t)dt + (h^2 + q^2 + hq)k(t)dt$$

$$+ (h + q)k(t)dw(t)$$

即有

$$dk(t) = sf(k(t))dt - (\delta + n + g)k(t)dt + (h^2 + q^2 + hq)k(t)dt + (h + q)k(t)dw(t)$$

命题 1 表明资本的瞬时变动是由漂移项和扩散项组成的, 其中漂移项为 $sf(k(t))dt - (\delta + g + n)k(t)dt + (h^2 + q^2 + hq)k(t)dt$, 扩散项为 $(h + q)k(t)dw(t)$ 。这个定理说明了人均资本瞬时增量等于产出中转化为投资的资本减去为了保持原有资本存量不变所需补偿的投资, 再加上由于劳动力及技术水平的不稳定因素的变动导致资本的变动量 $(h^2 + q^2 + hq)k(t)dt$ 。需注意由于劳动力及技术水平的不稳定因素的变动幅度的不同, 对资本的变动的影响会以平方形式放大或缩小, 因此这一影响不能忽略。最后一项为由于劳动力及技术水平的随机变动导致的资本存量变动的随机扰动项。后两项是确定型的 Solow-Swan 模型所不具备的, 但我们认为也不是可以轻易忽略的。我们可以称其为 Solow-Swan 模型基本的随机微分方程。式中为外生常数参数, 则此式也说明人均资本的变化只取决于其存量。但又由于随机部分非常量, 只服从一定的分布, 则当随机影响变动并非很大时, 不妨考虑人均资本量变化的期望。对一个具有一定分布的随机变量, 当系统较稳定时, 期望是值得考虑的一重要特征, 其表现了不确定性现象最可能出现的结果。因此有必要研究关于期望的一些问题。

对(4)式变形后两侧取期望, 有:

$$E \frac{dk(t)}{k(t)} = sE \frac{f(k(t))}{k(t)} dt - (\delta + g + n)dt + (h^2 + q^2 + hq)dt$$

则

$$E \frac{dk(t)/dt}{k(t)} = sE \frac{f(k(t))}{k(t)} - (\delta + g + n) + (h^2 + q^2 + hq) \quad (5)$$

由(5)式我们得到了 Solow-Swan 扩展模型下的又一个基本方程。它表明单位有效劳动占有的资本变化率的期望由三项构成: 第一项 $sE \frac{f(k(t))}{k(t)}$ 是每单位期望有效劳动的实际投资率的期望; 第二项 $(\delta + n + g)$ 是为了保持原有资本存量水平不变所需补偿增长率; 第三项 $(h^2 + q^2 + hq)$ 由于劳动力及技术水平的不稳定因素的变动增加的资本的变动率。其中前两项类似确定型 Solow-Swan 模型基本公式。这里以变化率的形式体现。回忆确定型 Solow-Swan 模型基本公式, 对其两侧除以 $k(t)$ 得到增长率形式

$$\frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (\delta + g + n)$$

可见随机情况取期望后比确定的多了 $(h^2 + q^2 + hq)$ 。

三、随机模型的相对稳定性分析

命题2 当 $E \frac{dk(t)/dt}{k(t)} = 0$ 时经济处于相对稳定状态。

证明: 不妨设 g_k, g_A, g_L 分别为人均资本, 劳动力, 技术水平的增量变化率。则由

式(2)知 $Eg_A = g$, $Eg_L = n$ 。当所有变量增长率的期望都是常数时, 这种状态即为相对稳定状态。由定理假设

$$E \frac{dk(t)/dt}{k(t)} = E \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (\delta + g + n) + (h^2 + q^2 + hq) = 0$$

由于增长率的期望为 0, $Ek(t)$ 为常数。对其他量增长率的期望为常量的证明:

由

$$dA(t)L(t) = (hq + n + g)A(t)L(t)dt + (h + q)A(t)L(t)dw(t)$$

则

$$\frac{dA(t)L(t)}{A(t)L(t)} = (hq + n + g)dt + (h + q)dw(t)$$

故有

$$E \frac{dA(t)L(t)/dt}{A(t)L(t)} = (hq + n + g)$$

而

$$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$$

对上式变形得

$$\ln K(t) = \ln(k(t)A(t)L(t)) = \ln k(t) + \ln(A(t)L(t))$$

对其两侧微分得

$$\frac{dK(t)/dt}{K(t)} = \frac{d(A(t)L(t))/dt}{A(t)L(t)} + \frac{dk(t)/dt}{k(t)}$$

再利用前式及命题条件即可得到 $E \frac{dK(t)/dt}{K(t)} = n + g + hq$ 。由于 $y(k(t)) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}$

同 $K(t), Y(t)$ 的增长率的期望也可证为 $n + g + hq$, 即 $E \frac{dY(t)/dt}{Y(t)} = n + g + hq$ 。由于 $k(t)$

$= \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$, 故 $\frac{K(t)}{L(t)} = k(t)A(t)$, 其中 $k(t)$ 的变化率的期望为 0, $A(t)$ 的变化率的期望

为 g 。故单位劳动率占有资本 $\frac{K(t)}{L(t)}$ 的变化率的期望为 g 。类似的可推导单位劳动力 $\frac{Y(t)}{L(t)}$ 产出的变化率的期望为 g 。

由上述命题可得以下观点:

(1) 在相对平衡状态上, 各量的期望增长率与资本水平无关。

(2) 人均产出增长率的期望与人均资本增长率的期望等于知识水平增长率的期望 g 。

(3) 资本存量增长率与产出增长率的期望等于有效劳动增长率的期望 $n + g + hq$ 。这比非随机情况多了 hq 。

如图 1, 上方为人均产出的期望曲线 $Ef(k)$, 下方为人均储蓄的期望曲线 $sEf(k)$, 从原点出发直线表示 $(n + g + \delta - h^2 - q^2 - hq)Ek(t)$ 。相对于确定的 Solow—Swan 模型所作的假设 $f'(k) > 0$, 则 $Ef(k), sEf(k)$ 切线斜率都为正的; 再设 $f''(k) < 0$ 则 $Ef(k), sEf(k)$ 上升速率不断减小, 且两曲线趋于水平, 并且是凹的。用 Inada 条件有在 $k = 0$ 处 $Ef(k), sEf(k)$

都垂直于 x 轴, $k \rightarrow \infty$ 时 $Ef(k), sEf(k)$ 是水平的。设 Ek^* 为相对平衡时的人均资本的期望。若初始人均资本存量如图 1 中 $Ek(0)$, 则从 $Ef(k)$ 曲线上 A 点到横轴垂直距离表示人均产出的期望, 从 $sEf(k)$ 曲线上 B 点到横轴垂直距离为人均储蓄的期望。从 A 到 B 的距离为人均消费的期望。从 $(n+g+\delta-h^2-q^2-hq)Ek(t)$ 曲线上 C 点到横轴垂直距离为有效折旧及有效劳动增长速度减去劳动力与技术进步不确定因素引起的变化。故人均储蓄的期望除了补偿上边的变化外还可以形成新增资本, 则人均资本的期望趋于上升趋势。反之当人均资本的期望高于 Ek^* 时, 如图 1 储蓄的期望不足以支付上述的资本补偿, 则人均资本的期望下降。此两种情况均说明当人均资本的期望偏离 (高于或低于) 其相对稳定状态时, 经济增长模型具有将任意初始人均资本的期望调整到最优人均资本的期望 Ek^* 的机制。而当资本的期望存量处于图 1 中 Ek^* 位置时, $Ef(k)$ 与 $(n+g+\delta-h^2-q^2-hq)Ek(t)$ 相等, 则人均资本的期望水平将保持不变。故随机意义下的 Solow-Swan 经济增长模型具有相对稳定性, 并且经济能够向相对平衡增长路径收敛。

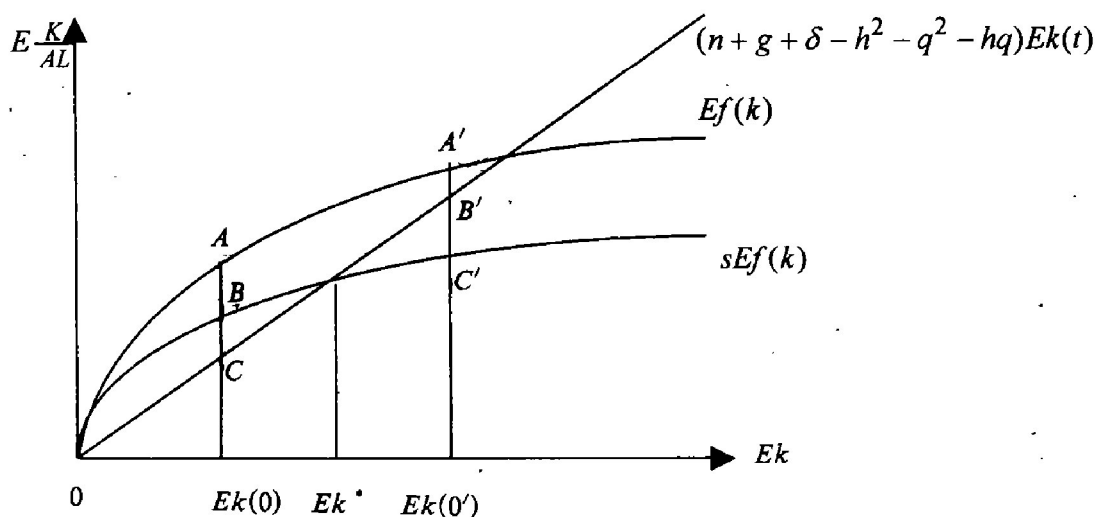


图 1 相位图

参考文献

Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman & Hall, 1996, 29~56.

朱保华:《新经济增长理论》, 上海财经大学出版社, 1999.

舒元等:《现代经济增长模型》, 复旦大学出版社, 1998.

蔡明超、孙培源:《金融数学与分析技术》, 复旦大学出版社, 2002.

2003 年 8 月

(作者单位: 吉林大学商学院)